Algèbre linéaire Série 1

Exercice 1 :

Effectuer, lorsque c'est possible, les opérations sur les matrices ci-dessous.

$$A=\begin{pmatrix}2&5\\-2&6\\1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&9\\4&-3&8\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&2&0{,}5\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-2\\0\\7\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&4\\-2&5\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

a)	$E+F$	d)	AB	g)	CA	j)	EF	m)	E^2	p)	$(AB)^T$
b)	$B+E$	e)	BA	h)	CD	k)	AF	n)	A^2		
c)	$3D$	f)	AC	i)	DC	l)	FA	o)	A^T		

Exercice 2 :

1) Calculer les produits matriciels suivants :

a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=$

b) $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$

c) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=$

d) $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=$

e) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}=$

f) $\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$

g) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}=$

h) $\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=$

2) Que constate-t-on ?

3) Soient A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et I la matrice identité d'ordre n.
Développer et simplifier les expressions suivantes : $(A+I)(A-I)$, $(A+2I)(A-3I)$

Exercice 3 :

1) Calculer, quand cela est possible les produits $A\cdot B$ et $B\cdot A$ des matrices A et B suivantes :

a) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2&0&-3\\0&0&0\\-2&0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&3&0\\5&0&7\\0&2&0\end{pmatrix}$

2) Que constate-t-on ?

Exercice 4 : On pose : $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

a) Calculer successivement : 1) $A^2, A^3, \dots A^n$ 2) $B^2; B^3; \dots; B^n$

b) Est-ce que ? 1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

Exercice 5 : *Gestion de notes scolaires*

Cinq élèves suivent un cours de mathématiques et ont eu trois épreuves à passer. Voici les résultats obtenus pour chacune des épreuves :

		Épreuves		
		1	2	3
Élèves	a	4.5	4.5	6.0
	b	3.5	4.5	2.0
	c	5.5	2.5	5.5
	d	6.0	5.0	4.5
	e	2.5	4.5	3.5

Les épreuves sont pondérées de la manière suivante :

Epreuve	1	2	3
Pondération	0,2	0,2	0,6

Une opération entre matrices permet de calculer ces moyennes directement. Imaginer une opération qui remplirait la tâche demandée.

Exercice 6 :

On donne les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}2\\ -5\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculer

a) $-2A$ b) $B-2A$ c) C^2 d) $E\cdot A$ e) $D\cdot B$ f) $A+2E\cdot B$

Exercice 7 :

a) Une matrice *A* est de type 5×3 et le produit $A\cdot B$ est de type 5×4. Quel est le type de la matrice *B* ?
b) Si *A* est une matrice de type 5×3 et *C* une matrice de type 2×5. Quel est le type de la matrice $C\cdot A$?
c) Si *M* est une matrice de type $n\times 1$ et *N* une matrice de type $1\times n$. Quel est le type des matrices $M\cdot N$ et $N\cdot M$?

Exercice 8 :

On donne une matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ et une matrice $C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

a) Trouver la matrice *B* telle que $A\cdot B=\begin{pmatrix}-20 & 30 & -5\\ 5 & -15 & 0\end{pmatrix}$.
b) Trouver la matrice *D* telle que $A\cdot D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
c) Trouver la matrice *E* telle que $C\cdot E=\begin{pmatrix}6\\ 3\end{pmatrix}$.
d) Trouver la matrice *F* telle que $C\cdot F=I_2$.

Exercice 9 :

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer

a) $A \cdot (B + C)$ b) $(A+B)^2$ c) $A^2 + 2A \cdot B + B^2$

d) $(A+B)\cdot(A-B)$ e) $A^2 - B^2$ f) C^2

Exercice 10 : *Élections*

Lors de la préparation d'une campagne électorale, un institut de recherche a analysé les préférences du corps électoral d'une région divisée en districts pour divers partis politiques.

Voici les pourcentages recensés par district et par parti politique :

Districts						
1	2	3	4	5	6	
0.40	0.35	0.30	0.50	0.30	0.36	radicale
0.42	0.40	0.25	0.30	0.30	0.32	socialiste
0.18	0.25	0.45	0.20	0.40	0.22	libérale

De plus, le nombre de votes des électeurs par district est connu :

District	1	2	3	4	5	6
Votes	30'000	60'000	70'000	45'000	55'000	40'000

Ce qui intéresse dès lors les partis politiques est de savoir combien de votes elles peuvent espérer obtenir. Faites ce calcul.

Plus d'exercices ? Voir CRM n°28, p.35-38 exercices 19 à 21 ex 24 à 32

Solutions Algèbre linéaire Série 1 :

Exercice 1 :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ b) impossible c) $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 24 & -15 & 58 \\ 20 & -18 & 30 \\ 14 & -9 & 33 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 13 & 37 \\ 22 & 26 \end{pmatrix}$ f) impossible

g) $(0{,}5 \quad 23{,}5)$ h) $(-0{,}5)$ i) $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 14 & 14 & 3{,}5 \end{pmatrix}$ j) $EF = E$ k) $AF = A$ l) impossible

m) $\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ -12 & 17 \end{pmatrix}$ n) impossible o) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ p) $\begin{pmatrix} 24 & 20 & 14 \\ -15 & -18 & -9 \\ 58 & 30 & 33 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

1 a)=b) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ c)=d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e)=f) $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ g)=h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A \cdot I = I \cdot A = A$ et $A \cdot O = O \cdot A = O$

3) Comme $AI = IA$, on a $(A + I)(A - I) = A^2 - I^2$ et $(A + 2I)(A - 3I) = A^2 - IA - 6I^2$

Exercice 3 :

1) a) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $AB = BA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

BA=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) La multiplication n'est en général pas commutative: $AB \neq BA$

Exercice 4 :

a) 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}, \dots, A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

2) $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \dots = B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) 1)et 2) oui car $AB = BA$

Exercice 5 :

$$\begin{pmatrix} 4{,}5 & 4{,}5 & 6 \\ 3{,}5 & 4{,}5 & 2 \\ 5{,}5 & 2{,}5 & 5{,}5 \\ 6 & 5 & 4{,}5 \\ 2{,}5 & 4{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ 2{,}8 \\ 4{,}9 \\ 4{,}9 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

a) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -6 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e) impossible , f) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 13 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 7

a) *B* est de type 3×4 b) $C \cdot A$ est de type 2×3 c) $M \cdot N$ est de type $n \times n$ et $N \cdot M$ est de type 1×1

Exercice 8

a) $B = \begin{pmatrix} -6 & 12 & -1 \\ 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$ c) $E = \begin{pmatrix} 2a+3 \\ a \end{pmatrix} \forall\, a \in \sim$ d) pas de solution

---

Exercice 9

a) $\begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 & -18 & 3 \\ 2 & -11 & 3 \\ 12 & -7 & -4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 5 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 10

On multiplie la matrice 3x6 des pourcentages par la matrice 6x1 du nombre de votants.

On obtient la matrice 3x1 représentant le nombre de votes obtenus pour chacun des partis :

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30'000 \\ 60'000 \\ 70'000 \\ 45'000 \\ 55'000 \\ 40'000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107'400 \\ 96'900 \\ 91'700 \end{pmatrix}$$