Algèbre linéaire Série 2

Exercice 1 : Calculer les déterminants suivants :

$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $c = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ $d = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & z \end{vmatrix}$

Exercice 2 : Calculer les déterminants suivants :

$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 3: Calculer les déterminants suivants:

$a = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \alpha & \beta - x \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ $c = \begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$

Exercice 4 :

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer : a) $Det(A)$ b) Det (B) c) $Det(A+B)$ 2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 :

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Que constate-on ?

Exercice 6 :

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Montrer que :

a) $Det(AB) = Det(A)Det(B)$
b) $Det(kA) = k^2 Det(A)$
c) $\mathrm{Det}(A^T) = Det(A)$
d) $Det(I) = 1$

Exercice 7 :

a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix}$, déterminer les valeurs de k pour lesquelles $Det(A) = 0$

b) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, déterminer la valeur de x pour laquelle $Det(B) = 0$

Exercice 8 :

Vérifier les égalités suivantes sans calculer les déterminants.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 9 : Exprimer les déterminants suivant en fonction de $p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$s = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$, $t = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$, $u = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$,

$v = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \end{vmatrix}$, $w = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2 + 2a_1 & 3b_2 + 2b_1 & 3c_2 + 2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Exercice 10 : Calculer et factoriser en utilisant les propriétés des déterminants.

$a = \begin{vmatrix} 1 & \beta+\gamma & \alpha \\ 1 & \gamma+\alpha & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \gamma \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} x & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix}, d = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$

Exercice 11 : Résoudre (par rapport à x) en utilisant les propriétés des déterminants.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

Exercice 12 : Calculer les déterminants suivants.

$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$, $c = \begin{vmatrix} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{vmatrix}$

Exercice 13 : Démontrer les identités suivantes

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

Cette propriété peut être généralisée à l'ordre n (déterminant de Vandermonde)

Solutions ALS2 :

Ex 1 : $a = 8, b = 11, c = -2, d = xz$ **Ex 2:** $a = 79, b = 24, c = -12$

Ex 3 : $a = x^2 - (\alpha + \beta)x, b = \lambda^2 - 7\lambda + 2, c = 2m - 4$

Ex 4 : a) 11 b) -1 **c)** 5 On en déduit que, en général : $Det(A + B) \neq Det(A) + Det(B)$

Ex 5 :

> *Définition :* Une matrice carrée est dite ***triangulaire*** si tous ses éléments au-dessous (ou au-dessus) de la diagonale principale sont tous nuls. Les matrices a) et b) sont des matrices *triangulaires inférieures* et c) et d) sont des matrices *triangulaires supérieures*.

1. **a)** $\det(A) = 15$ **b)** $\det(B) - 42$ **c)** $\det(A) = -18$ **d)** $\det(A) = 24$
2. Si la matrice est triangulaire inférieure ou supérieure alors le déterminant est donné par le produit des éléments de la diagonale principale.

Ex 6 : a) $Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},\ Det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$

Donc

$$\begin{aligned} Det(A)Det(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\ &= \mathrm{a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} - \cancel{a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}} \\ &\quad - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} - a_{22}\cancel{b_{21}a_{12}b_{22}} = \end{aligned}$$

ainsi : $Det(AB) = Det(A)Det(B)$

Ex 7: a) $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 4k = 2k(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = 2$

b) $Det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot x \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + 1 \cdot c \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ x & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)a \cdot \begin{vmatrix} x & b \\ x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow abc - xbc - acx - abx = 0 \Leftrightarrow xbc + acx + abx = abc \Leftrightarrow x(bc + ac + ab) = abc$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

Ex 9 : $s = -p, t = -p, u = p, v = 0, w = 3p$
Ex 10: $a = 0, b = (x-1)(x-\alpha), c = -(t+2)(t-2)(t-4), d = (x-y)(y-z)(z-x)(xy + yz + zx)$
Ex 11: **a)** $x = a \text{ ou } x = b$ **b)** même solution que a)
Ex 12: $a = 27, b = 512, c = (eh - gf)(ps - rq)$