Algèbre linéaire Série 3

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes et, lorsque c'est possible, leur matrice inverse.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 :

Dans chacune des équations matricielles suivantes, trouvez la matrice inconnue X; pour ce faire, isolez d'abord la matrice inconnue X, puis effectuez les calculs numériques requis.

Exemple : $$AX = B \overset{Det(A)\neq 0}{\Leftrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

a) $AX = B, avec\ A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $AX = B, avec\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$

c) $AX + B = X, avec\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $XA + B = X, avec\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

Vérifier que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\ et\ B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\ et\ B = A$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\ et\ B = \begin{pmatrix} -11 & 19 & -1 \\ -8 & 14 & -1 \\ 10 & -17 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

Calculer, si elles existent les matrices inverses des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

Calculer, si elles existent, les matrices inverses des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

a) $\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2+\lambda & \lambda \\ -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & \lambda+3 & \lambda-4 \\ 1 & 6 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 3 \\ 2\lambda-1 & 4 & -4 \\ \lambda & \lambda & 2 \end{pmatrix}$

Solutions ALS3

Ex 1: a) $Det(A) = -1 \neq 0 \Leftrightarrow A\ inversible\ \ A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $Det(A) = 2, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $Det(A) = 0$ donc A pas inversible **d)** comme c)

e) $Det(A) = k^2 = \begin{cases} 0, si\ k = 0 \Leftrightarrow A\ pas\ inversible \\ \neq 0, si\ k \neq 0 \Leftrightarrow A\ inversible \end{cases}$ $A^{-1} = \frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$

f) $Det(A) = k^3 = \begin{cases} 0, si\ k = 0 \Leftrightarrow A\ pas\ inversible \\ \neq 0, si\ k \neq 0 \Leftrightarrow A\ inversible \end{cases}$ $A^{-1} = \frac{1}{k^3}\begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1/k \end{pmatrix}$

g) $Det(A) = a_{11}a_{22} = \begin{cases} 0\ si\ a_{11} = 0\ ou\ a_{22} = 0 \Leftrightarrow A\ pas\ inversible \\ \neq 0, si\ a_{11} \neq 0\ et\ a_{22} \neq 0 \Leftrightarrow A\ inversible \end{cases}$

$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}}\begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1/a_{22} \end{pmatrix}$

h) $Det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} = \begin{cases} 0\ si\ a_{11} = 0\ ou\ a_{22} = 0\ ou\ a_{33} = 0 \Leftrightarrow A\ pas\ inversible \\ \neq 0, si\ a_{11} \neq 0\ et\ a_{22} \neq 0\ et\ a_{33} \neq 0 \Leftrightarrow A\ inversible \end{cases}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} \end{pmatrix}$$

i) $Det(A) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\ \ A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

j) $Det(A) = 1(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = 1\ A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 2: a) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $X = (A - I)^{-1}(-B) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}(-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$

d) $X = (-B)(A - I)^{-1} = (-1)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

Ex4: a) $\begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$ **b)** non inversible **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

e) si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $\frac{1}{a-a^2}\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ **f)** non inversible **g)** $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

Ex 5: a) non inversible **b)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **f)** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **g)** non inversible **h)** $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$

Ex 6: a) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$, **b)** $\lambda \in \mathbb{R}$, **c)** $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, **d)** $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 4\right\}$