Algèbre linéaire Série 6

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles à part !

Exercice 1 :

Déterminer si les applications ci-dessous sont linéaires

a) $f: (x_1; x_2) \longmapsto (2x_1 - x_2; x_1)$

b) $f: (x_1; x_2) \longmapsto (x_1^2; x_1 + x_2)$

Exercice 2 :

Donner les matrices associées aux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ci-dessous associées à la base canonique, puis calculer l'image des vecteurs $(2; -1)$ et $(-5; 7)$.

a) $f: (x_1; x_2) \longmapsto (2x_1; 3x_1 - x_2)$

b) $f: (x_1; x_2) \longmapsto (3x_1 - 4x_2; x_1 + 5x_2)$

c) $f: (x_1; x_2) \longmapsto (x_1; x_2)$

Exercice 3 :

Donner les matrices associées aux applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ ci-dessous associées à la base canonique, puis calculer l'image du vecteur $(1; 4; -5)$.

a) $f: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (2x_1 - 3x_2 + 4x_3; 5x_1 - x_2 + 2x_3; x_1 + x_2)$

b) $f: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (x_1; x_2; x_3)$

Exercice 4 :

Donner explicitement les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définies par les matrices ci-dessous.

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 11 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad M_g = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Soit $f: (x_1; x_2; x_3; x_4) \longmapsto (x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4; x_2 + 3x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer si les vecteurs suivants appartiennent au noyau de f. Justifiez.

$a = (-1; 0; 1; 0)$ $\qquad c = (0; -2; -7; 1)$ $\qquad e = (6; 3; 1; -1)$

$b = (0; 0; 0; 0)$ $\qquad d = (-7; -3; 0; 1)$

b) Déterminer le noyau de l'application f.

c) Que constate-t-on par rapport aux vecteurs du point a) ?

d) Donner un autre vecteur appartement à $Ker(f)$.

Exercice 6 :

Soit $f: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (2x_1 + 3x_2 + 2x_3; x_2 + x_3; 2x_1 - x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer si les vecteurs suivants appartiennent à l'image de f.
$a = (8; 1; 7), b = (0; 0; 0), c = (0; 1; 0), d = (5; 3; -4)$

b) Déterminer le noyau de f.

Exercice 7 :

Déterminer l'image et le noyau de f ainsi que $dim\big(Im(f)\big)$ et $\dim\big(Ker(f)\big)$

a) $f: (x_1; x_2) \longmapsto (x_1 - x_2; 0)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

b) $f: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (x_1 - x_3; 2x_3 - 2x_1)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 8 :

On considère les applications linéaires suivantes.

$f: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (-x_1 + 2x_2; 2x_1 - 3x_2 - x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

$g: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (3x_1 - x_2 - 5x_3; -6x_1 + x_2 + 11x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

$h: (x_1; x_2) \longmapsto (x_1 - 3x_2; -2x_1 + x_2; -x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

a) Déterminer $f + g$ puis écrire sa matrice associée. Déterminer ensuite $M_f + M_g$

b) Déterminer $f \circ h$ puis écrire sa matrice associée. Déterminer ensuite $M_f \cdot M_h$

Exercice 9 :

Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ sachant que :

a) $f\big((3; 1)\big) = (-3; -1)$ et $f\big((-3; -1)\big) = (1; 1)$

b) $f((3; 1)) = (-3; -1)$ et $f\big((-1; 3)\big) = (1; 7)$

Exercice 10 :

On donne les matrices associées suivantes :

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad M_h = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad M_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices associées aux endomorphismes suivants :

a) $-2f + 3g$

b) $g - k$

c) $f \circ h$

d) $f \circ f$

e) $g \circ g$

f) $k \circ k$

g) $g \circ h$

h) $h \circ g$

Exercice 11 :

Déterminer l'image et le noyau des endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ définis par leur matrice associée.

a) $M_f = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $M_f = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ d) $M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 12 :

a) Soit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice associée $M = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 4 & \mu \end{pmatrix}$

Déterminer pour quelles valeurs de μ, l'application f n'est pas bijective.
Déterminer ensuite $Im(f)$ et $Ker(f)$ dans chacun des cas.

b) Soit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice associée $M = \begin{pmatrix} \mu - 1 & 2 \\ \mu & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer pour quelles valeurs de μ, l'application f n'est pas bijective.
Déterminer ensuite $Im(f)$ et $Ker(f)$ dans chacun des cas.

Exercice 13 :

Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice associée.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14 :

Soit un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice associée $M = \begin{pmatrix} 3 & \mu & 1 \\ \mu & -1 & -2 \\ 1 & \mu & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer pour quelle valeur de μ, l'application f n'est pas bijective.

Déterminer ensuite $Im(f)$ et $Ker(f)$ pour la valeur trouvée.

Exercice 15 : Soit l'endomorphisme $f\big((x_1; x_2)\big) = (6x_1 + 10x_2; -2x_1 - 6x_2)$

et soit $g\big((x_1; x_2)\big) = (x_2; 3x_1 + 2x_2)$

a) Vérifier que f est bijectif.
b) Déterminer l'application réciproque de f.
c) Déterminer la matrice associée à $g \circ f$ ainsi que l'application $g \circ f$.
d) Déterminer la matrice associée à $f - g$.

Exercice 16 :

Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivante, sont-elles linéaires ?

1) $h\big((x\,;y)\big) = x + y$
2) $h\big((x\,;y)\big) = 2\,x - y$
3) $h\big((x\,;y)\big) = x\,y$
4) $h\big((x\,;y)\big) = (2\,x - y\,;x)$
5) $h\big((x\,;y)\big) = (x + 1\,;y)$
6) $h\big((x\,;y)\big) = (x - y\,;0)$
7) $h\big((x\,;y)\big) = \big(0\,;|y|\big)$
8) $h\big((x\,;y)\big) = (x\,;y\,;x - y)$
9) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (x\,;y)$
10) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (x + 2\,y\,;z - 2\,y)$
11) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (z\,;y\,;x)$
12) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (0\,;x\,;2\,x)$
13) $h\big((x\,;y)\big) = (x^2\,;x + y)$
14) $h\big((x\,;y)\big) = (x - y\,;y - x)$
15) $h\big((x\,;y)\big) = \big(\sin(x)\,;y\big)$
16) $h\big((x\,;y\,;z)\big) = (x - z\,;2\,z - 2\,x)$

Exercice 17 :

Soit f, une application linéaire de …… vers ………

$$f((x\,;\,y\,;\,z\,;\,t)) = (x - y + z + t\,;\,x + 2\,z - t\,;\,x + y + 3\,z - 3\,t)$$

a) Déterminer $Ker(f)$
b) Déterminer la dimension du $Ker(f)$
c) Déterminer $Im(f)$
d) Déterminer la dimension de $Im(f)$
e) Déterminer si $a = (1; 3; -2; 8)$ appartient au noyau de f.

Exercice 18 :

Trouver une application linéaire $f\,:\,\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tel que

$Im(f) = \{\lambda(1; 2; 0; -4) + \mu(2; 0; -1; -3) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Exercice 19 :

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires 4), 6), 8), 9), 10), 11), 12) 14) et 16) de l'exercice 16.

Solutions Algèbre Linéaire Série 6 :

Exercice 1 : a) Oui b) Non

Exercice 2 : a) $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, f\big((2;-1)\big) = (4;7), f\big((-5;7)\big) = (-10;-22)$

b) $M_f = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, f\big((2;-1)\big) = (10;-3), f\big((-5;7)\big) = (-43;30)$

c) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f\big((2;-1)\big) = (2;-1),, f\big((-5;7)\big) = (-5;7)$

Exercice 3 : a)$M_f = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, f\big((1;4;-5)\big) = (-30;-9;5)$

b) $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f\big((1;4;-5)\big) = (1;4;-5)$

Exercice 4 :

$f: (x_1;x_2;x_3) \longmapsto (x_1 + 3x_2 - 2x_3; -3x_1 + 6x_2; 11x_1 + 3x_2 - 5x_3)$ $g: (x_1;x_2;x_3;x_4) \longmapsto (2x_2 + x_3 + 3x_4; 4x_1 + x_2 + 2x_3)$

$h: (x_1;x_2) \longmapsto (x_1 + 2x_2; 2x_1 - x_2; 3x_1)$ $i: (x_1;x_2) \longmapsto (x_1; -x_1 + x_2)$

Exercice 5 :

a) $a, b, d, e \in Ker(f)$ et $c \notin Ker(f)$

b) $Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 | x = \lambda(-1;0;1;0) + \mu(-7;-3;0;1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

c) Si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on obtient le vecteur a. Si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, on obtient le vecteur b. Si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, on obtient le vecteur d.

d) Par exemple, Si $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, on obtient le vecteur $(-8;-3;1;1)$.

Exercice 6 :

a) $a, c \notin Im(f)$ et $b, d \in Im(f)$ b) $Ker(f) = \{(t;-2t;2t) | t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 7 :

a) $Im(f) = \{(t;0) | t \in \mathbb{R}\}$ et $Ker(f) = \{(t;t) | t \in \mathbb{R}\}$

b) $Im(f) = \{(t;-2t) | t \in \mathbb{R}\}\ et\ Ker(F) = \{(t;s;t) | t, s \in \mathbb{R}\}$

Exercice 8 : a) $(f+g)\big((x_1;x_2;x_3)\big) = (2x_1 + x_2 - 5x_3; -4x_1 - 2x_2 + 10x_3)$ $M_{f+g} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}, M_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, M_g = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -6 & 1 & 11 \end{pmatrix}, M_f + M_g = M_{f+g}$

b) $(f \circ h)\big((x_1;x_2)\big) = f\big((x_1 - 3x_2; -2x_1 + x_2; -x_2)\big) = (-5x_1 + 5x_2; 8x_1 - 8x_2)$,

$M_{f\circ h} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} = M_f \cdot M_h, M_h = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

Exercice 9 : a) impossible b) $M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 10 :

a) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
g) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 11 :

a) $Im(f) = \{(-3\lambda; \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ $Ker(f) = \{(-3\lambda; \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
b) $Im(f) = \{(-4\lambda; 3\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $Ker(f) = \{(\lambda; 0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
c) $Im(f) = \{(0; \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ $et\ Ker(f) = \{(3\lambda; \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ d) $Im(f) = \mathbb{R}^2$ donc $Ker(f) = \{0\}$

Exercice 12 :

a) Si $\mu = 2$: $Ker(f) = \{(\lambda; -2\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ $et\ Im(f) = \{(\lambda; 2\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
si $\mu = -2$: $Ker(f) = \{(\lambda; 2\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ $et\ Im(f) = \{(\lambda; -2\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
b) $\mu = 3$, $Ker(f) = \{(\lambda; -\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ $et\ Im(f) = \{(2\lambda; 3\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exercice 13 :

a) $Ker(f) = \{(\lambda; -\lambda; -\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\} et\ Im(f) = \{(\lambda - 2\mu; \lambda - 3\mu; 5\lambda - 4\mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
b) $Im(f) = \{(-\lambda; 2\lambda; \mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ $et\ Ker(f) = \{(\lambda; 2\lambda; 0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exercice 14 :

$\mu = \frac{1}{2}$ donc $Ker(f) = \{(0; 2\lambda; -\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $Im(f) = \{(6\lambda + \mu; \lambda - 2\mu; 2\lambda - 4\mu) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Exercice 16 :

Oui : 1)2) 4) 6) 8) 10) 11) 12) 14) 16) Non : 3) 5) 7) 13) 15)

Exercice 17 : a) $Ker(f) = \{\lambda(2; 1; -1; 0) + \mu(1; 2; 0; 1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ b) 2

c) $Im(f) = \{\lambda(1; 1; 1) + \mu(-1; 0; 1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ d)2 e) non

Exercice 18 : $f\big((x; y; z)\big) = (x + 2y ; 2x ; -y ; -4x - 3y)$

Exercice 19 : 4) $Ker(h) = \{0\}$, $Im(h) = \mathbb{R}^2$

6) $Ker(f) = \{(t, t), t \in \mathbb{R}\}, Im(h) = \{(s; 0), s \in \mathbb{R}\}$

8) $Ker(f) = \{0\}, Im(h) = \{t(1; 0; 1) + s(0; 1; -1), t, s \in \mathbb{R}\}$

9) $Ker(h) = \{(0; 0; t), t \in \mathbb{R}\}, Im(f) = \mathbb{R}^2$

10) $Ker(h) = \{(-2t; t; 2t), t \in \mathbb{R}\}, Im(h) = \mathbb{R}^2$

11) $Ker(h) = \{0\}$, $Im(h) = \mathbb{R}^3$ 12) $Ker(h) = \{(0; t; s), t, s \in \mathbb{R}\}, Im(f) = \{(0; t; 2t), t \in \mathbb{R}\}$

14) $Ker(h) = \{(t; t), t \in \mathbb{R}\}, Im(h) = \{(t; -t), t \in \mathbb{R}\}$

16) $Ker(h) = \{(t; s; t), t, s \in \mathbb{R}\}, Im(h) = \{(t; -2t), t \in \mathbb{R}\}$