Algèbre linéaire Série 7

Exercice 1 :

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par $f\big((1;0)\big) = (2;3)$ et $f\big((0;1)\big) = (5;7)$.
Déterminer l'image $f\big((x;y;)\big)$ d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Les applications suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a) $f: (x;y) \mapsto (x+1;y)$
b) $f: (x;y) \mapsto (x-y;2x+4y)$
c) $f: (x;y) \mapsto (x;xy)$
d) $f: (x;y) \mapsto (x^2;0)$

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B = (e_1;e_2)$, on considère les vecteurs :

$a_1 = 2e_1 + e_2$ $\quad a_2 = 5e_1 + 3e_2$ $\quad b_1 = 7e_1 + 2e_2$ $\quad b_2 = 4e_1 + e_2$

1) Vérifier que $B_1 = (a_1;a_2)$ et $B_2 = (b_1;b_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2) Établir la matrice de passage de la base B à la base B_1.
3) Établir la matrice de passage de la base B_1 à la base B.
4) Établir la matrice de passage de la base B à la base B_2.
5) Établir la matrice de passage de la base B_2 à la base B.
6) Établir la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.
7) Établir la matrice de passage de la base B_2 à la base B_1.

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère quatre vecteurs :

$$a_1 = (-5;1), a_2 = (-2;2), b_1 = (-1;-3) \text{ et } b_2 = (5;7)$$

On pose : $B_1 = (a_1;a_2) et\ B_2 = (b_1;b_2)$

a) Établir la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.
b) Établir la matrice de passage de la base B_2 à la base B_1.
c) Sachant que la matrice-colonne associée à un vecteur u relativement à la base B_1 est $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, calculer la matrice-colonne X_2 associée au même vecteur u relativement à la base B_2.
d) Sachant que la matrice-colonne associée à un vecteur v relativement à la base B_2 est $Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, calculer la matrice-colonne Y_1 associée au même vecteur v relativement à la base B_1.

Exercice 5 :

Déterminer les valeurs et les vecteurs propres des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ définis par :

a) $f\big((x;y)\big) = (3y; x+2y)$
b) $f\big((x;y)\big) = \left(-\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y; \frac{1}{4}x + y\right)$

Exercice 6 :

On donne des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ par leurs matrices relativement à la base canonique. Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque cela est possible, déterminer la matrice d'un changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme et écrire la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7 :

Un endomorphisme $f\ de\ \mathbb{R}^2$admet les valeurs propres $2\ et -3$ et les sous-espaces propres $E_2 = L\big((2;-1)\big)$ et $E_{-3} = L\big((3;1)\big)$.
Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

Exercice 8 :

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ admet les valeurs propres $1, 2$ et -3 et les sous-espaces propres associés : $E_1 = L\big((1;0;1)\big), E_2 = L\big((0;-1;1)\big)$ et $E_{-3} = L\big((0;1;1)\big)$.
Déterminer les matrices de f dans la base des vecteurs propres et dans la base canonique.

Exercice 9 :

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

a) Vérifier que $(1;-1)$ et $(3;-1)$ sont deux vecteurs propres de f.
Quelles sont les valeurs propres associées ?

b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base des vecteurs propres.
Calculer P^{-1}.

c) On note D la matrice de f relativement à la base des vecteurs propres.
Écrire D et vérifier $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

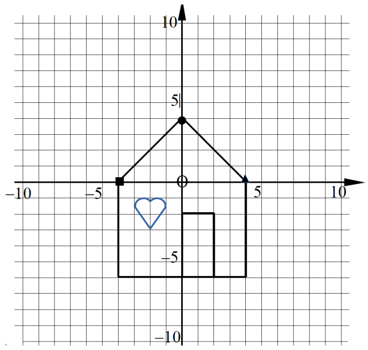
d) Vérifier l'égalité : $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis calculer A^2.

e) Calculer A^5.

Exercice 10 :

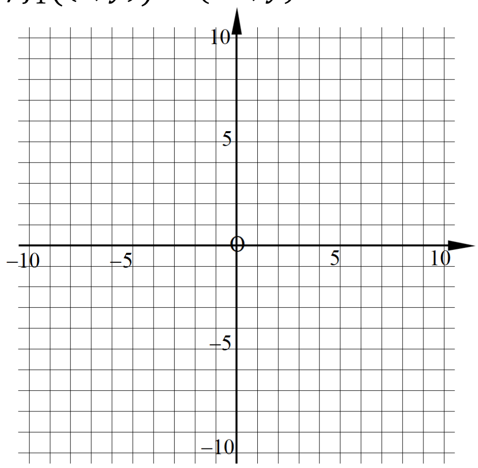
Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique. Calculer A^6, en diagonalisant la matrice A.

Exercice 11 :

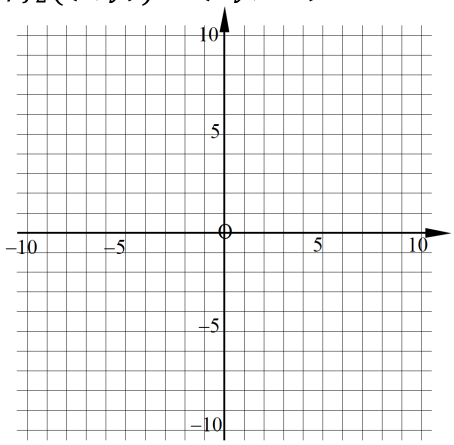


Voici un dessin dans le plan muni d'un repère $E = \mathbb{R}^2$.
Vous pouvez repérer quelques points qui vous servirons à déterminer l'image de ce dessin par les huit transformations linéaires proposées ci-dessous.
Pour chacune : Déterminez sa matrice, dessinez l'image, identifiez la transformation.

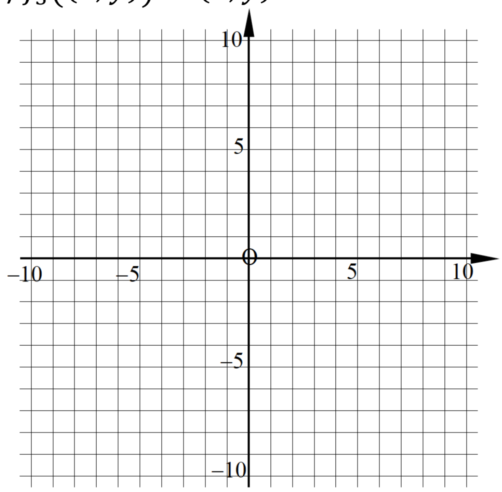
1) $f_1\big((x;y)\big) = (-x;y)$



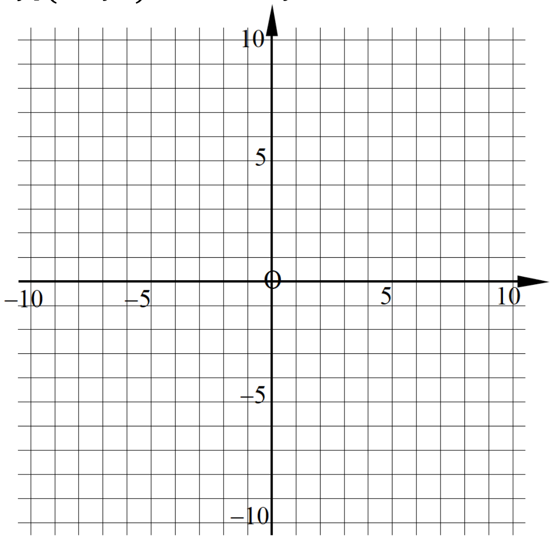
2) $f_2\big((x;y)\big) = (-y;-x)$



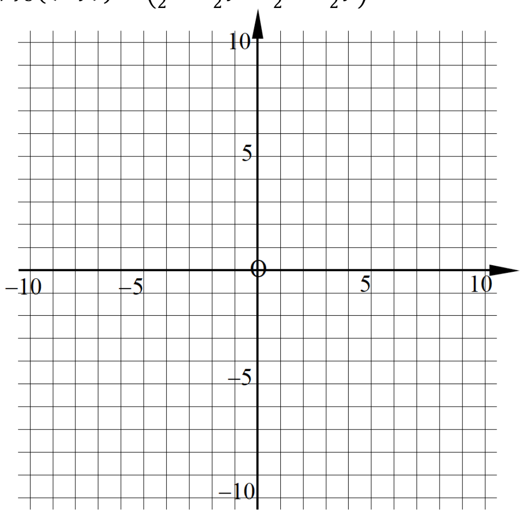
3) $f_3\big((x;y)\big) = (0;y)$



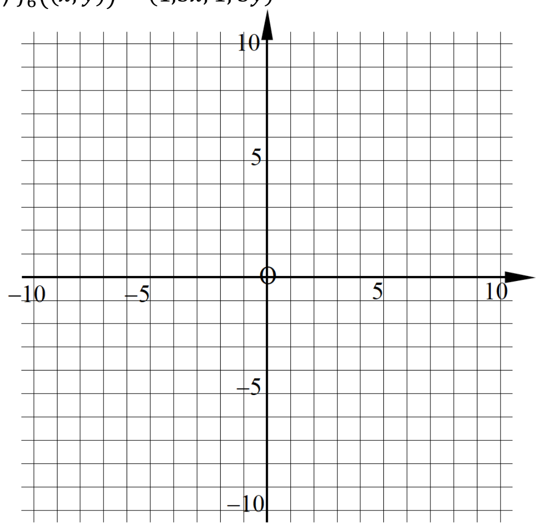
4) $f_4\big((x;y)\big) = (-x;-y)$



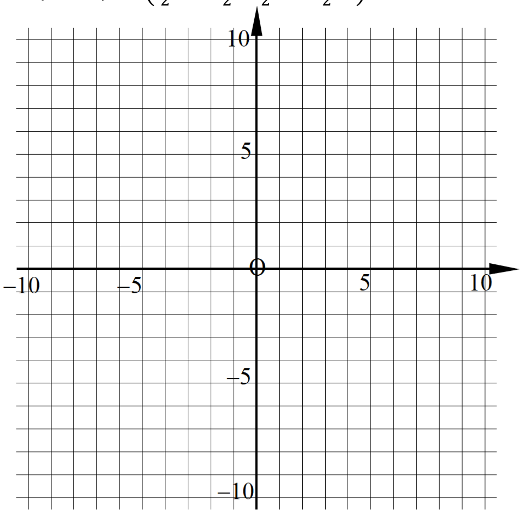
5) $f_5\big((x;y)\big) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y; -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$



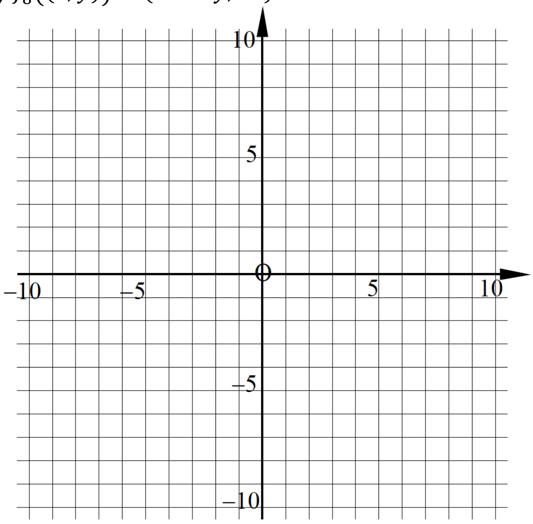
6) $f_6\big((x;y)\big) = (1{,}5x; 1; 5y)$



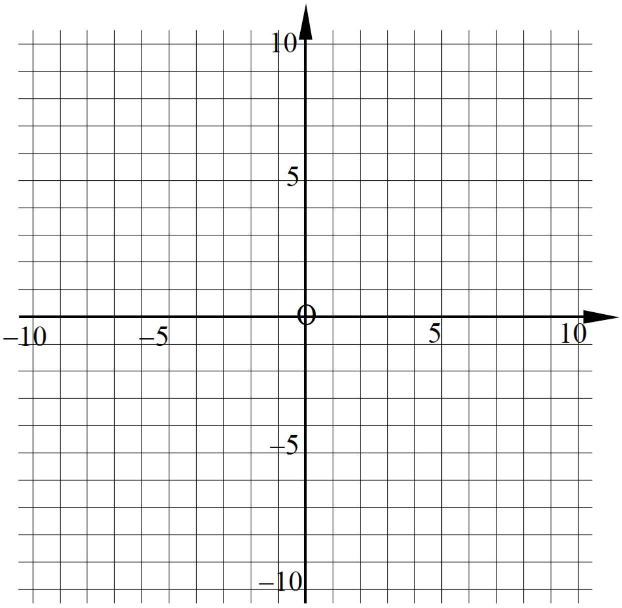
7) $f_7\big((x;y)\big) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y; \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$



8) $f_8\big((x;y)\big) = (-x + y; 2x)$



Et si on prend l'application suivante : $f_9\big((x;y)\big) = (x + 1; y - 2)$, qu'advient-il de ce dessin ? Est-ce que f_9 est linéaire ?



Exercice 12 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $u = (2;1), v = (-1;1), s = (3;1)\ et\ t = \left(2;\frac{1}{3}\right)$ ainsi que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base canonique $(e_1;e_2)$ est $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer les matrices de f relativement aux bases suivantes.

a) $(e_2;e_1)$ b) $(e_1+e_2;3e_2)$ c) $(u;v)$ d) $(s;t)$

Exercice 13 :

On considère une base $B = (e_1;e_2;e_3)$ d'un espace vectoriel E et un endomorphisme f de E défini par $f(e_1) = e_1 - e_2, f(e_2) = e_2 - e_3\ \ et\ f(e_3) = e_3 - e_1$.

a) Écrire la matrice de f relativement à la base B.
b) On pose $u_1 = e_2 + e_2, u_2 = e_1 + e_3\ et\ u_3 = e_1 + e_2$. Montrer que $B' = (u_1;u_2;u_3)$ est une autre base.
c) Déterminer la matrice de f relativement à la base B'. Que peut-on observer ?

Exercice 14 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

On note $B = (e_1;e_2;e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans B est A.

On pose $e_1' = (1;1;1); e_2' = (1;-1;0)\ et\ e_3' = (1;0;1)$ et $B' = (e_1';e_2';e_3')$

a) Montrer que B' constitue une base de $\mathbb{R}^3$
b) Écrire la matrice de f dans cette base.
c) Déterminer une base de $Ker(f)$ et de $Im(f)$

Solutions ALS7

Exercice 1 :

$(2x+5y;3x+7y)$

Exercice 2 :

a) non b) oui c) non d) non

Exercice 3 :

2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $Y_1 = \begin{pmatrix} -20 \\ 34 \end{pmatrix}$

Exercice 5 :

a) $\lambda = 3, E_3 = L\big((1;1)\big)\ et\ \lambda = -1, E_{-1} = L\big((3;-1)\big)$
b) $\lambda = \frac{1}{2}, E_{\frac{1}{2}} = L\big((2;-1)\big)\ et\ \lambda = \frac{1}{4}, E_{\frac{1}{4}} = L\big((3;-1)\big)$

Exercice 6 :

a) $\lambda_1 = -3$, $E_{-3} = L\big((1;-1;2)\big), \lambda_2 = 0, E_0 = L\big((-1;1;1)\big), \lambda_3 = 2, E_2 = L\big((2;3;4)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6;\ E_2 = L\big((1;0;-1);(2;-1;0)\big), E_6 = L\big((1;1;1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 2; L_0\big((1;1;0)\big), E_2 = L((-1;1;0),\big((0;0;1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\lambda_1 = 1, E_1 = L\big((1;2;6)\big)$, A n'est pas diagonalisable

e) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2\ \ E_3 = L\big((1;0;0)\big); E_4 = \big((0;1;0)\big); E_2 = L\big((2;1;-2)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

f) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3; E_1 = L\big((1;2;0)\big), E_2 = L\big((0;1;1)\big), E_3 = L\big((1;2;-1)\big)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 :

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8 :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 :

a) $\lambda = 5, v_1 = (1;-1), \lambda = 3, v_2 = (3;-1)$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

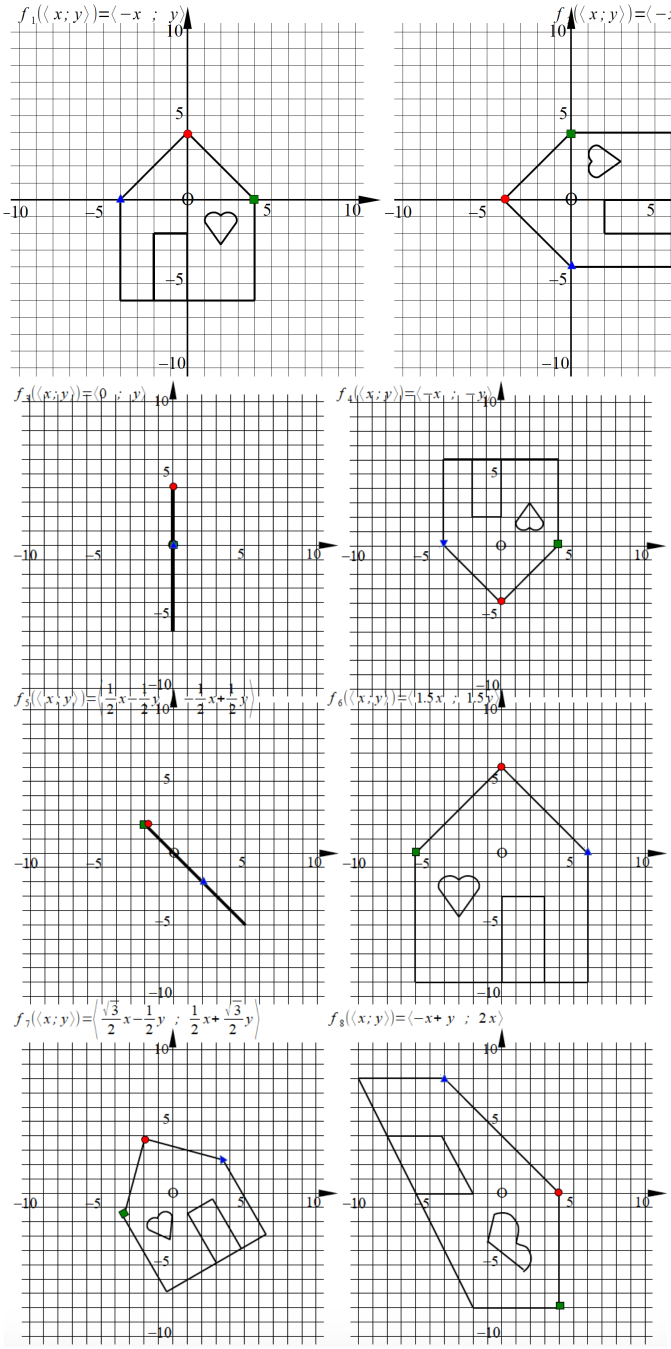
d) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 8 & 33 \end{pmatrix}$

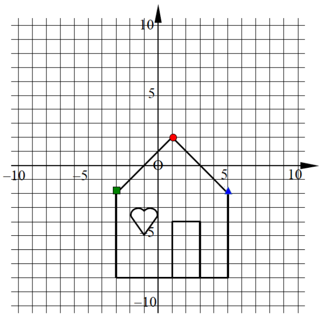
e) $A^5 = \begin{pmatrix} -1198 & -4323 \\ 1441 & 4566 \end{pmatrix}$

Exercice 10 :

$A^6 = \begin{pmatrix} 1394 & -665 \\ 1330 & -601 \end{pmatrix}$

Exercice 11 :





9) C'est une translation, pas une application linéaire, car l'image de l'origine n'est pas sur l'origine

---

Exercice 12 : a) $\begin{pmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 4\\-4 & 11\end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-21 & -20\\36 & 33\end{pmatrix}$

Exercice 13 : a) $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$

c) $P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $M'=P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}=M$

Exercice 14 : b) $M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ c) $Ker(f)=L(e_3')\quad Im(f)=L(e_1';e_2')$