Analyse Série 1

Ne rien écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées

Exercice 1 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (éventuellement commencer par simplifier l'écriture) :

a) $f(x) = \ln(4x - 5)$ b) $f(x) = \ln\left(\sqrt{3 - x^2}\right)$ c) $f(x) = \ln(3x^5)$

d) $f(x) = \ln((x^2 + x - 1)^3)$ e) $f(x) = x ln(x) - x$ f) $f(x) = \ln(cos(x))$

g) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ h) $f(x) = \ln(ln(x))$ i) $f(x) = \ln(x - 3)$

j) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ k) $f(x) = \ln(-5x)$ l) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

m) $f(x) = ln^2\left(\frac{1}{x}\right)$ n) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)$

Exercice 2 :

Déterminer la valeur des intégrales suivantes : *(réponse en valeur exacte)*

a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+2}\right) dx$ b) $\int_0^2 \left(\frac{x}{x^2+1}\right) dx$ c) $\int_0^1 \left(\frac{1}{3x-5}\right) dx$

d) $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}\right) dx$ e) $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4} dx$ f) $\int_2^7 \frac{1}{x}\, dx$

Exercice 3 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (éventuellement commencer par simplifier l'écriture) :

a) $f(x) = x \cdot e^x$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

c) $f(x) = e^{x^2-3}$

d) $f(x) = (2x^2 - 3)e^{3x}$

e) $f(x) = \sqrt{e^x}$

f) $f(x) = e^{\ln(x)}$

g) $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$

h) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

i) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

j) $f(x) = x \cdot \ln(e^{x^2+1})$

k) $f(x) = e^x \cdot e^{x+1} \cdot x^{x-2}$

l) $f(x) = (e^x)^2$

Exercice 4 :

Déterminer la valeur des intégrales suivantes : *(réponse en valeur exacte)*

a) $\int_{-1}^{1} e^x \, dx$ b) $\int_0^1 e^{3x} dx$ c) $\int_0^{ln(2)} ((e^x + 1)^3) dx$

d) $\int_{-1}^{1} (e^{2x} + 4e^x) dx$ e) $\int_2^3 5e^{2x+1}$ f) $\int_{-1}^{2} 3xe^{x^2-1} dx$

g) $\int_1^3 \frac{4e^{2x}}{e^{2x+3}} dx$ h) $\int_{-1}^{2} \frac{3x}{e^{x^2-1}} dx$ i) $\int_0^e \frac{x}{x^2+1} dx$

- ***Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM p. 221 ex 6.8***

Exercice 5 : *(Théorème de l'Hospital)*

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1} =$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 e^{-2x})$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x\cdot\ln(x)}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^3}$

- ***Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM p. 129 ex 4.1***

Exercice 6 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{ln|x+1|}{x}$

a) Déterminer le domaine de définition et les zéros de *f*.
b) Déterminer les asymptotes de f en ∞ et en $-\infty$.
c) Déterminer si f admet une asymptote verticale. Justifier précisément cette réponse.

Exercice 7 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$.

a) Déterminer le domaine de définition et les zéros de *f*.
b) Déterminer les asymptotes de f en ∞ et en $-\infty$.
c) Déterminer si f admet une asymptote verticale. Justifier précisément cette réponse.

Exercice 8 :

Soit la fonction $f(x) = ln|x^2 + x|$.

a) Déterminer le domaine de définition et les zéros de *f*.

b) Calculer *f* '(*x*).

c) Déterminer le domaine de définition et les zéros de *f* '.

d) Elaborer le tableau des variations de *f*.

e) Déterminer les éventuelles asymptotes verticales de *f*.

f) Déterminer les éventuelles asymptotes affines de *f*.

g) A partir des résultats obtenus, représenter la fonction *f* sur un repère orthonormé (taille 14 cm sur 14 cm, échelle 1 unité = 4 largeurs de carré).

Exercice 9 :

Soit la fonction $f(x) = x^2e^x$.

a) Déterminer le domaine de définition et les zéros de *f*.
b) Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
c) Calculer *f* '(*x*) puis déterminer son domaine de définition ainsi que ses zéros.
d) Elaborer le tableau des variations de *f*.
e) Représenter f à partir des résultats obtenus sur un repère orthonormé
(taille 14 cm sur 14 cm, échelle 1 unité = 2 largeurs de carré).

Exercice 10 :

Trouver une primitive de f

1) $f(x) = \frac{1}{2x-5}$
2) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$
3) $f(x) = \frac{x+1}{x}$
4) $f(x) = \frac{5x^3}{3x^4}$
5) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$
6) $f(x) = \frac{4x-4}{x^2-2x+4}$
7) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$
8) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
9) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$
10) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+6}$
11) $f(x) = \frac{1}{xln(x)}$
12) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 11 :

a) Calculer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.
b) Calculer les zéros des fonctions 1) à 4).

1) $f(x) = \ln(x + 3)$
2) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$
3) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)$
4) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
5) $f(x) = \ln(ln(x))$

➢ ***Plus d'exercices ? Livre d'Analyse p. 220-223 ex 6.1 et 6.17***

Exercice 12 : Calculer les intégrales suivantes. Arrondir le résultat au centième près.

1) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$ 2) $\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x+2} dx$ 3) $\int_2^3 \frac{x^2-1}{x} dx$ 4) $\int_0^4 \frac{5x^2}{x^3+4} dx$

Exercice 13 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \ln(3-x)$
2) $f(x) = \ln(x^2+1)$
3) $f(x) = \ln(sin(x))$
4) $f(x) = x^2 + 3\ln(2x-5)$

Exercice 14 : Calculer le domaine de définition et les zéros de la fonction suivante :

$$f(x) = \ln\left(\frac{-3x+3}{x^2-5x-6}\right)$$

Exercice 15 : *(Le paradoxe du peintre)*

On considère la fonction $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi qu'un réel a supérieur à 1.

1) Sur un repère orthonormé *(taille 10 cm sur 10 cm, échelle 1 unité = 4 largeurs de carré, uniquement le cadran positif)*, représenter f et hachurer la surface S située sous f entre $x = 1$ et $x = a$.
2) Exprimer l'aire de S en fonction de a.
3) Calculer la limite de cette aire lorsque a tend vers ∞.
4) Calculer, en fonction de a, le volume du corps engendré par la rotation de S autour de l'axe horizontal.
5) Calculer la limite de ce volume lorsque a tend vers ∞.

Exercice 16 : On considère la fonction $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

1) Calculer le domaine de définition puis la dérivée de f.
2) Utiliser le résultat obtenu pour trouver une primitive de la fonction logarithme naturel.

Exercice 17 : Trouver toutes les primitives des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$
2) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$
3) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
4) $f(x) = \frac{2x-1}{x}$
5) $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}$

Exercice 18 : Calculer les intégrales suivantes. Arrondir le résultat au centième près.

1) $\int_0^1 \frac{x}{x^2-4} dx$
2) $\int_2^3 \left(\frac{2}{1-x} + \frac{1}{3x-5}\right) dx$

Exercice 19 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1) $f(x) = e^{2x}$ 2) $f(x) = e^{x^2-3}$ 3) $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$
4) $f(x) = \sqrt{e^x}$ 5) $f(x) = x^2 e^x$ 6) $f(x) = \ln(x) - 2e^x$

Solutions Analyse Série 1 :

Exercice 1 :

a) $f'(x) = \frac{4}{4x-5}$
b) $f'(x) = -\frac{x}{3-x^2}$
c) $f'(x) = \frac{5}{x}$
d) $f'(x) = \frac{6x+3}{x^2+x-1}$
e) $f'(x) = \ln(x)$
f) $f'(x) = -tan(x)$
g) $f'(x) = \frac{(1-\ln(x))}{x^2}$
h) $f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$
i) $f'(x) = \frac{1}{x-3}$
j) $f'(x) = \ln(x) + 1$
k) $f'(x) = \frac{1}{x}$
l) $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$
m) $f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$
n) $f'(x) = \frac{7}{(2x-1)(3x+2)}$

Exercice 2 :

a) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ b) $\frac{\ln(5)}{2}$ c) $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{5}\right)$ d) $\ln(4)$ e) $\ln\left(\frac{9}{16}\right)$ f) $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$

Exercice 3 :

a) $f'(x) = (x+1)e^x$
b) $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$
c) $f'(x) = 2xe^{x^2-3}$
d) $f'(x) = (6x^2+4x-9)e^{3x}$
e) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$
f) $f'(x) = 1$
g) $f'(x) = 3e^{3x} + e^{-x}$
h) $f'(x) = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$
i) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
j) $f'(x) = 3x^2 + 1$
k) $f'(x) = 3e^{3x-1}$
l) $f'(x) = 2e^{2x}$

Exercice 4 :

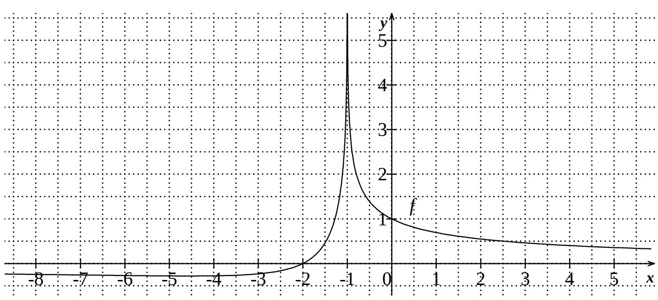
a) $\frac{e^2-1}{e}$ b) $\frac{e^3-1}{3}$ c) 10,53 d) $\frac{1}{2}e^2 + 4e - \frac{1}{2}e^{-2} - 4e^{-1}$ e) $\frac{5}{2}(e^7 - e^5)$
f) $\frac{3}{2}(e^3 - 1)$ g) $\frac{8}{e^3}$ h) $-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{e^3} - 1\right)$ i) $\frac{1}{2}(\ln(e^2+1))$

Exercice 5

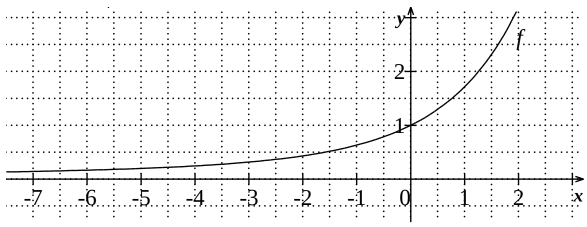
a) 1 b) 2 c) 1 d) 2 e) 0 f) ∞ g) 0 h) 0

Exercice 6 :

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, Z_f = \{-2\}$
b) AH $y = 0$ pour $x \to -\infty$
& AH $y = 0$ pour $x \to \infty$.
c) AV $x = -1$ (avec un trou en (0 ;1))



Exercice 7 :



a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; Z_f = \emptyset$

b) AH $y = 0$ pour $x \to -\infty$

la fonction f diverge pour $x \to \infty$

c) La fonction f n'admet pas d'AV mais un trou en $(0; 1)$.

Exercice 8 :

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}; Z_f = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} \cong \{-1{,}618; 0{,}618\}$

b) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$

c) $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}; Z_f = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

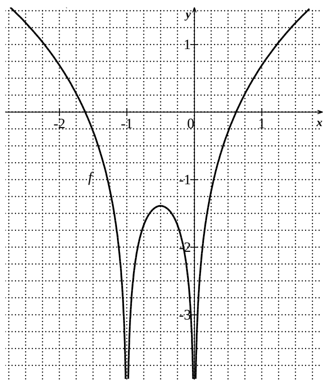
d)

x		-1		$\frac{1}{2}$		0	
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+x	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
Variation de f	↘		↗	Max.	↘		↗

e) AV $x = -1$ et $x = 0$

f) La fonction f diverge, elle n'a pas d'asymptote affine.

g)



Exercice 9 :

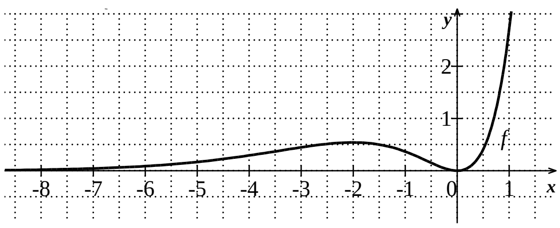
a) $D_f = \mathbb{R}, Z_f = \{0\}$

b) ∞ (pour ∞) et 0 (pour $-\infty$)

c) $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x, D_{f'} = \mathbb{R}, Z_{f'} = \{-2; 0\}$

d)

x		-2		0	
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+2x	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de f	↗	Max	↘	min	↗



Exercice 10 :

1) $F(x) = \frac{1}{2} ln|2x - 5| + c$ 2) $F(x) = ln|x^2 - x - 2| + c$ 3) $F(x) = x + ln|x| + c$

4) $F(x) = \frac{5}{3} ln|x| + c$ 5) $F(x) = \frac{3}{2} ln|x^2 + 1| + c$ 6) $F(x) = 2ln|x^2 - 2x + 4| + c$

7) $F(x) = \frac{1}{2} ln|x^2 - 4| + c$ 8) $F(x) = ln|\sin(x)| + c$ 9) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + ln|x| - \frac{1}{x} + c$

10) $F(x) = \frac{1}{3} ln|x^3 - 3x + 6| + c$ 11) $F(x) = ln\big|ln|x|\big| + c$ 12) $F(x) = \frac{1}{2} ln^2|x| + c$

Exercice 11 :

1) $D_f =]-3; \infty[\,, Z_f = \{-2\}$ 2) $D_f = \mathbb{R} \setminus [-2; 2], Z_f = \{\pm\sqrt{5}\}$

3) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[, Z_f = \left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$ 4) $D_f = \mathbb{R}, Z_f = \{0\}$ 5) $D_f =]1; \infty[, Z_f = \{e\}$

Exercice 12 :

1) 0,49 2) $-0{,}69$ 3) 2,09 4) 4,72

Exercice 13 :

1) $\frac{1}{x-3}$ 2) $\frac{2x}{x^2+1}$ 3) $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$ 4) $2x + \frac{6}{2x-5}$

Exercice 14 :

$D_f =]-\infty; -1[\cup]1; 6[\quad Z_f = \{1 \pm \sqrt{10}\}$

Exercice 15 :

1) 2) $\int_1^a \frac{1}{x} dx$ 3) ∞ 4) $\left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$ 5) 1

Exercice 16 :

1) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \ln(x) + 1$ 2) $F(x) = x(\ln(x) - 1)$

Exercice 17 :

1) $-\frac{1}{2(x-2)^2} + c$ 2) $\frac{1}{2-x} + c$ 3) $ln|x - 2| + c$ 4) $2x - ln|x| + c$ 5) $ln|x^3 + x + 1| + c$

Exercice 18 :

1) -014 2) $-0{,}92$

Exercice 19 :

1) $2e^{2x}$ 2) $2xe^{x^2-3}$ 3) $e^x(\sin(x) + \cos(x))$ 4) $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ 5) $xe^x(x + 2)$ 6) $\frac{1}{2} - 2e^x$