# Analyse Série 2

## Rappel : Plan d'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction est la synthèse de tout ce que l'on peut dire d'une fonction donnée *f*.

Pour étudier une fonction *f*, on traite habituellement les points suivants :

**1)** ***Domaine de définition.***
2) Parité (fonction paire ou impaire), périodicité.
3) ***Zéros***, signe de la fonction (Tableau des signes), et ***ordonnée à l'origine***.
4) ***Asymptotes verticales*** et « trous ».
5) ***Asymptotes affines***.
6) Dérivée *f'* et ses zéros (points critiques, extremum).
7) Croissance et point critique (***Tableau des variations***).
8) Dérivées seconde *f''* et ses zéros (points d'inflexion).
9) Courbure de *f* (concavité, convexité), (***Tableau de courbure***).
10) ***Représentation graphique***.

**Remarque :** On s'assurera de la cohérence des résultats obtenus. Pour obtenir une représentation graphique soignée, on peut, en plus des résultats déjà obtenus, calculer des valeurs de la fonction en quelques points.

---

## Exercice 1 :

Etudier et représenter le graphique des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x-2)^2 e^x$
2. $f(x) = xe^{-x}$
3. $f(x) = xe^{x^2}$
4. $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$
5. $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

---

## Exercice 2 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}$

1) Etudier et représenter le graphique de *f*.
2) Hachurer le domaine borné D délimité par *f* et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 0$.
3) $F(x) = (ax + b)e^{-x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
   Calculer *a* et *b* sachant que *F* est une primitive de *f*.

4) Calculer la superficie de D.
5) Interpréter sur le graphique de $f$ l'expression : $F(0) - F(3)$

## Exercice 3 :

On considère la fonction $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(x+2)e^{-x} \end{cases}$

1) a) Calculer la fonction dérivée de $f$.

   b) Déterminer les réels $a$ et $b$, sachant que la fonction définie par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$ est une primitive de $f$.

   c) Déterminer la primitive $G$ de $f$ qui s'annule en $-1$.

2) a) Étudier le signe de $f$.

   b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   c) Étudier la croissance de $f$ et déterminer les coordonnées des points critiques (extremums et points d'inflexion).

   d) Parmi les graphes esquissés ci-dessous, quel est celui qui représente la fonction $f$ ?

3) a) À l'aide d'une somme de Riemann formée de quatre termes, calculer une valeur approchée du domaine compris entre l'axe horizontal, le graphe de $f$ et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.

   b) Calculer l'aire exacte de ce domaine.

   c) Quelle est la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[-1;1]$ ?

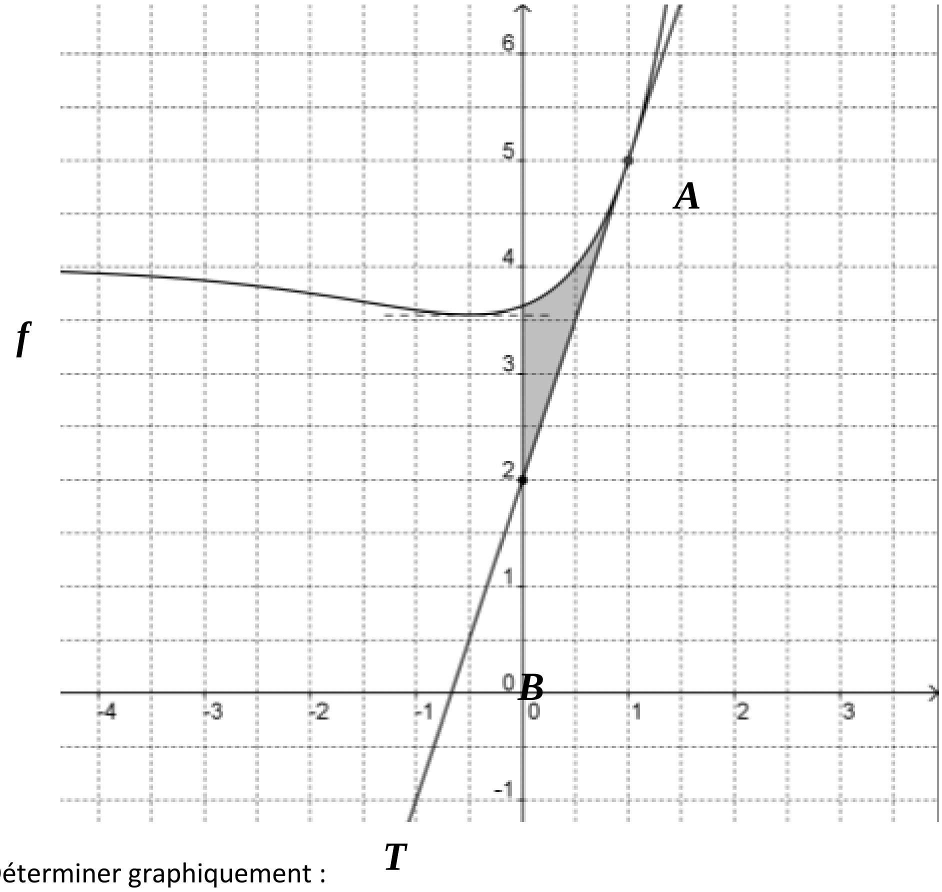
## Exercice 4 :

On a représenté la fonction $f$ ci-dessous.

Le graphe de $f$ passe par le point $A(1;5)$, elle admet la droite $T$ comme tangente en ce point.

Le point $B(0;2)$ appartient à la droite $T$.

Le graphe de $f$ admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.




**Partie A:** Déterminer graphiquement :

1) les images suivantes : $f(1)$, $f'(1)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ;
3) Les ensembles de solution des équations $f(x)=1$ et $f(x)=4$.

**Partie B:** La fonction représentée est définie par $f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4$.

1) Calculer $f'(x)$.
2) Étudier la croissance de $f$ et calculer les coordonnées exactes de l'extremum de $f$.
3) Déterminer $a$ et $b$ de sorte que la fonction $G(x)=(ax+b)e^{x-1}+4x$ soit une primitive de $f$.
4) Déterminer la primitive de $f$ qui s'annule en 1.
5) Calculer l'aire du domaine ombré.

## Exercice 5 :

Soit la fonction *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ esquissée ci-dessous.

On considère la fonction g définie par $g(x) = ln(f(x))$.

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

a) En quel point *f* n'est-elle pas dérivable ? (Ce point est unique)

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Construire le tableau de variations de *f*. (Croissance, extremum)

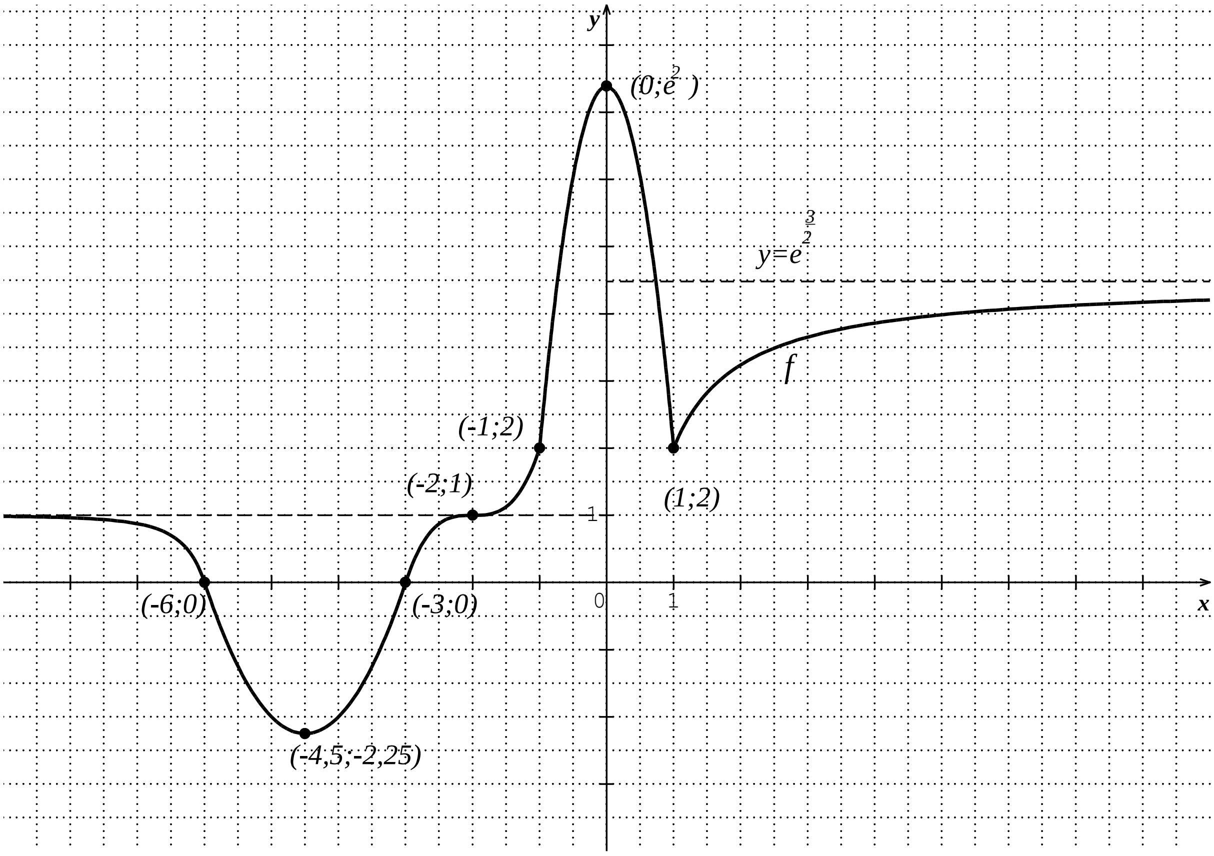
d) Déterminer $D_g$, l'ensemble de définition de g.

e) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-3_+} g(x)$.

f) Calculer la dérivée de la fonction *g* en fonction de *f* et de *f'*.

g) En quels points g admet-elle une tangente horizontale ?

h) Déterminer les coordonnées d'un extremum de *g*.




## Exercice 6 :

Etudier et représenter le graphique des fonctions suivantes.

1) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

2) $f(x) = \ln(x^2 + 9)$

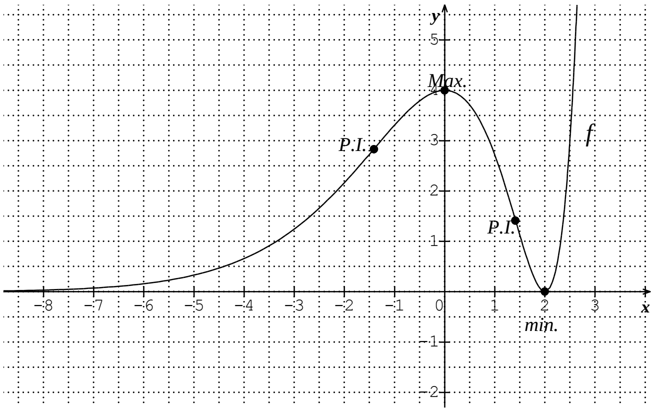
3) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$

4) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

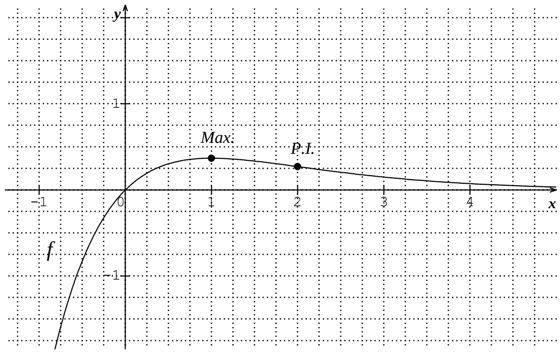
# Solutions Analyse Série 2 :

## Exercice 1

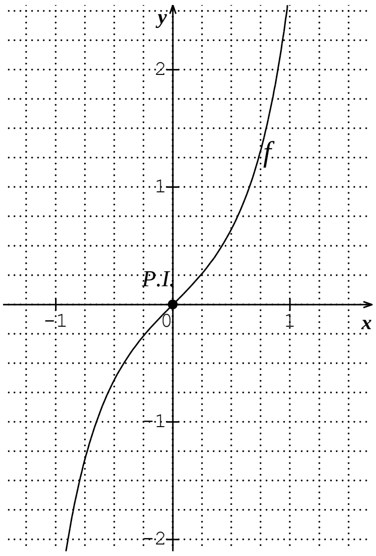
**1)** $f(x) = (x-2)^2e^x$



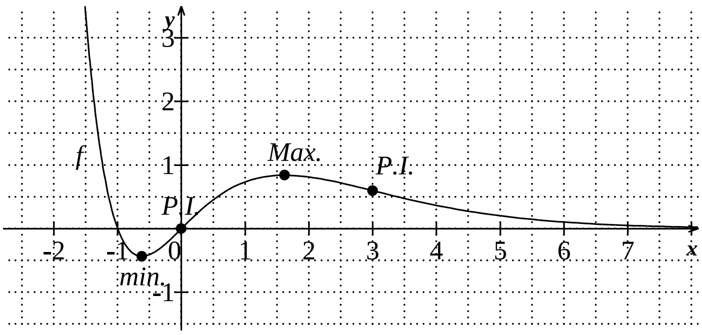

**2)** $f(x) = xe^{-x}$



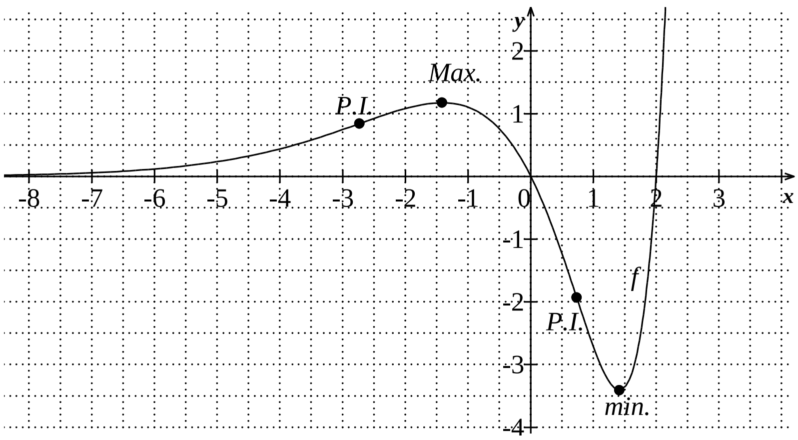

**3)** $f(x) = xe^{x^2}$




4) $f(x)(x^2+x)e^{-x}$

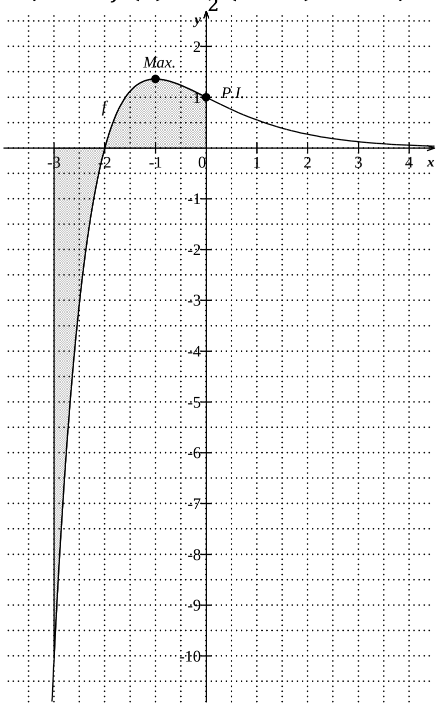



5) $f(x) = (x^2-2x)e^x$



## Exercice 2

1) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}$ 1)




2)

3) $\boxed{\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}}$ donc $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)e^{-x}$ est une primitive de *f.*

4) $\left|\int_{-3}^{-2} \frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x}\right| + \int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x} = \frac{1}{2}e^2 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^2\right) = -\frac{3}{2} + e^2 \ \left[u^2\right]$

5) $F(0) - F(-3)$ $F(0) - F(-3) = \int_{-3}^{0} \frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x} = -\frac{3}{2}$ représente l'aire algébrique du domaine D

## Exercice 3

1) a) la fonction dérivée de $f(x) = 2(x+2)e^{-x}$ est $f'(x) = -2x^{-x}(x+1)$

b) $F'(x) = (ax + x - b)e^{-x}; (-ax + a - b) = 2(x+2)$ $\boxed{a = -2 \text{ et } b = -6}$

$F(x) = (-2x - 6)e^{-x}$

c) La primitive $G$ de $f$ qui s'annule en -1 : $G(x) = F(x) - F(-1) = (-2x-6)e^{-x} + 4e$

| $x$ | | $-2$ | |
|---|---|---|---|
| $2(x+2)$ | - | 0 | + |
| $e^{-x}$ | + | + | + |
| $f(x)$ | - | 0 | + |

2) a) Étude du signe de $f$ :

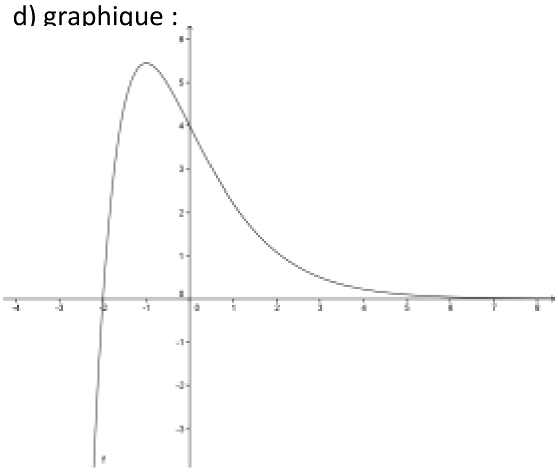
b) limites : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) Étude la croissance de $f$ et coordonnées des points critiques (extremums et points d'inflexion).

$f'(x) = -2(x+1)x^{-x}$; zéro : -1 ; $f''(x) = 2xe^{-x}$ ; zéro : 0

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | - |
| $f''(x)$ | - | - | - | 0 | + |
| $f$ | | $2e$ max | | 4 | |
| $f$ | | | | infl | |

d) graphique :



3) a) **Somme de Riemann :**

$$\frac{1}{2}\left(f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75)\right)$$

$$\frac{1}{2}(5.29 + 4.49 + 3.50 + 2.60); \quad 7.94$$

b) **Aire exacte** : $\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = 4e - 8e^{-1} = 7.93$

c) **Valeur moyenne** : $m = \dfrac{4e - 8e^{-1}}{2} = \dfrac{7.93}{2} = 3.965$

## Exercice 4

Partie A : 5 ; 3 ; 0

Partie B :

1) $f'(x) = (2x+1)e^{x-1}$ ; 2) $f$ est décroissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ ; $f$ est croissante sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Minimum: $\left(-\frac{1}{2}; 4-2e^{-1,5}\right)$

3) $a = 2$; $b = -3$ 4) $F(x) = G(x) - 3$ 5) $A = \frac{3}{e} - \frac{1}{2} \approx 0,604$

---

## Exercice 5

a) En $x=1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{\frac{3}{2}}$

c)

| | $-\infty$ | $-4,5$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ |
| Variation de $f$ | □ | Min. | □ | P.I. | □ | Max. | □ | | □ |

minimum : $(-4,5;-2,25)$

Maximum : $(0;e^2)$

d) $D_g = ]-\infty;-6[ \cup ]-3;+\infty[$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = ln(1) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-3_+} g(x) = -\infty$.

f) $g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

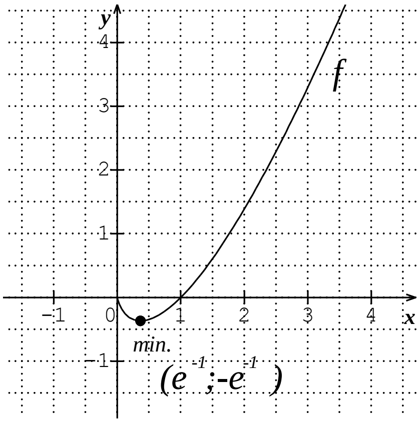
g) $g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{x=-4,5}_{\notin D_g}$ $ou$ $x=-2$ $ou$ $x=0$

h) g admet deux tangentes horizontales aux points $(0;\ln(e^2)) = (0;2)$ et $(-2;\ln(1)) = (-2;0)$

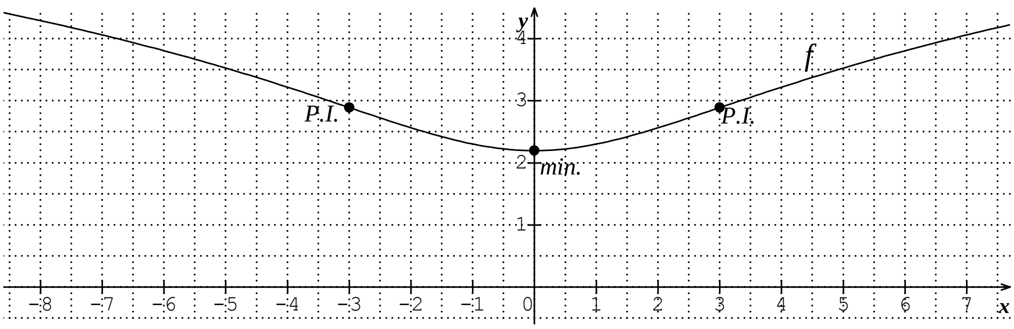
i) $(0;\ln(e^2)) = (0;2)$

## Exercice 6 : *n°1*

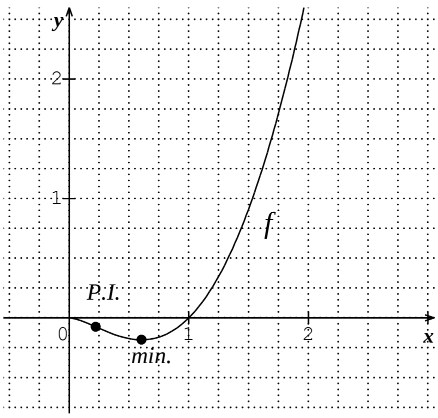
1) $f(x) = x \cdot ln(x)$




2) $f(x) = ln(x^2 + 9)$




3) $f(x) = x^2 \cdot ln(x)$




4) $f(x) = ln(x^2 - 4)$