Analyse Série de Révisions

Pour reprendre le chapitre d'analyse là où il a été laissé en fin de 3e, il convient de bien avoir les **règles de dérivations** et quelques primitives en tête.

Voilà donc des formules utiles aux exercices.

Règles de dérivation :

1) $(\lambda)' = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$	5) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
2) $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$	6) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
3) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	7) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
4) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$	8) $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$

Primitives :

1) $\int \alpha f(x)dx = \alpha F(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2) $\int (f+g)(x)dx = (F+G)(x) + c, c \in \mathbb{R}$
3) $\int f'\big(g(x)\big)g'(x)dx = f\big(g(x)\big) + c, c \in \mathbb{R}$
4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c, c \in \mathbb{R}$
5) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + c, c \in \mathbb{R}$
6) $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ *intégration par partie (p.p.)*

$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
x	1	0
$\frac{1}{2}x^2$	x	1
$\frac{1}{3}x^3$	x^2	$2x$
$\frac{1}{4}x^4$	x^3	$3x^2$
$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$
$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, si\ x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, si\ x < 0 \end{cases}$	$\lvert x\rvert$	$\begin{cases} 1, si\ x > 0 \\ -1, si\ x < 0 \end{cases}$

Exercice 1 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sous forme factorisée, sans exposants négatifs ou fractionnaires).

a) $f(x) = 4x - 3$
b) $f(x) = \sqrt{2}$
c) $f(x) = -x$
d) $f(x) = 5x^8 - 3x^3 + 2x^2$
e) $f(x) = \frac{3}{4}x^8 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{2}$
f) $f(x) = (5x^2 + 1)^2$
g) $f(x) = \frac{1}{2}(x^{10} + 4x^3)$
h) $f(x) = (x^8 - 1)(4x^2 - 1)$
i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
j) $f(x) = \frac{1}{x^3}$
k) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$
l) $f(x) = (x^2 + 1)^{51}$
m) $f(x) = \frac{(5x-3)^3}{(1-2x)^2}$
n) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{7}{3}x^3 - x^2 + 1$
o) $f(x) = (3x^2 - 1)^{10}$
p) $f(x) = \cos(2x)$
q) $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$
r) $f(x) = 2\tan(x) + x$

Plus d'exercices ?
Voir FUNDAMENTUM de mathématique ANALYSE p. 84-86 ex 3.26 à 3.29 & 3.30 & 3.35

Exercice 2 : Reprendre l'exercice 1 et déterminer pour chaque fonction (sauf l), p),q) et r)) l'équation de la droite tangente à f en $a = 1$.

Rappel: $T_a(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

Exercice 3 :

A) Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

1) $\int (4x + 3)dx$
2) $\int (9t^2 - 4t + 3)dt$
3) $\int (4x^2 - 8x + 1)dx$
4) $\int \left(\frac{1}{z^3} - \frac{3}{z^2}\right) dz$
5) $\int (3x - 1)^2 dx$
6) $\int (3x - 1)^3 dx$
7) $\int (3x - 1)^7 dx$
8) $\int x(2x + 3)dx$
9) $\int \frac{3}{4}\cos(u)\, du$
10) $\int -\frac{1}{5}\sin(x)\, dx$
11) $\int a^2 dx$
12) $\int (b - a^2)du$
13) $\int 3x^4 dx$
14) $\int (x^3 - 5x^2 + 3x - 2)dx$
15) $\int (x^2 - 5x + 6)dx$
16) $\int ((x + 1)^8 + 1)dx$
17) $\int (2 - x)^{13} dx$
18) $\int 6x(3x^2 + 1)^2 dx$
19) $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx$
20) $\int \left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$
21) $\int (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^5 dx$
22) $\int \left(4 + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^4}\right) dx$
23) $\int \frac{x^3-3}{x^2} dx$
24) $\int (3x + 2)^6 dx$
25) $\int x\sqrt{x} dx$
26) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
27) $\int (2x - 5)\sqrt{x^2 - 5x + 6}\, dx$
28) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}} dx$
29) $\int \sin(3x)\, dx$
30) $\int \left(1 + tan^2(2x)\right)dx$
31) $\int \frac{1}{2}\cos\,(4x)dx$
32) $\int sin^5(x)\cos(x)\, dx$
33) $\int \sin(x)\, cos^4(x)dx$
34) $\int \sin(x)\,(1 - \cos(x))dx$
35) $\int x\sqrt{2x^2 + 1} dx$
36) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

B) Calculer les intégrales définies suivantes (réponse en valeurs exactes)

1) $\int_{-2}^{1}(x^3 - 3x + 2)dx$
2) $\int_{0}^{2}(1-t)^3 dt$
3) $\int_{-1}^{1}(2 + 3x^2 - 5x^4)dx$
4) $\int_{0}^{1} x^2(2x+1)^2 dx$
5) $\int_{0}^{1} \frac{v^2}{(v^3+1)^2} dv$
6) $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right) dx$
7) $\int_{0}^{3} \sqrt{1+x}\, dx$
8) $\int_{-1}^{0} 2x(1+x^2)^2 dx$
9) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{(1+\tan(x))^2}{cos^2(x)} dx$
10) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} sin^2(x)\cos(x)\, dx$
11) $\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\, dx$
12) $\int_{1/4}^{4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) dx$
13) $\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos(3x)\, dx$
14) $\int_{1/2}^{2} \frac{x^2+1}{x^2} dx$
15) $\int_{2}^{3} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$
16) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{(4x+1)^3} dx$
17) $\int_{1}^{2} \frac{x^3+2}{x^2} dx$
18) $\int_{0}^{2} \frac{5x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$
19) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 2sin^3(3x)\cos(3x)\, dx$
20) $\int_{1}^{3}(6a^5 + b)dx$
21) $\int_{0}^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Exercice 4 :

Déterminer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant la méthode par parties :

a) $\int_0^{\pi} x\sin(2x)dx$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)dx$ **e)** $\int_0^{3} x\sqrt{1+x}dx$ **f)** $\int_1^{10} \ln(x)dx$

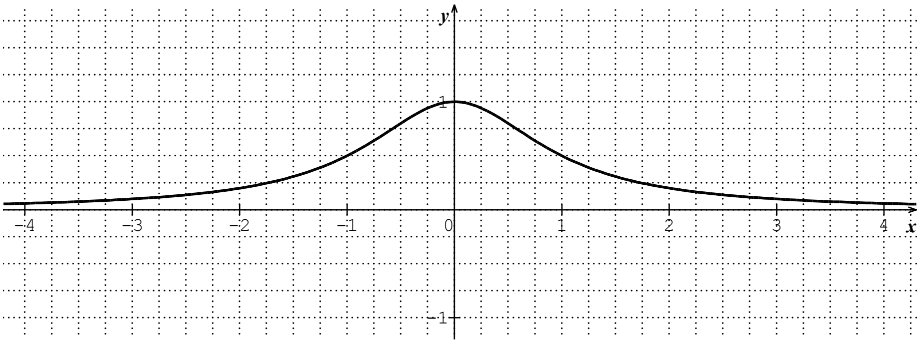
Exercice 5 :

Calculer la ou les valeur(s) de k telle(s) que

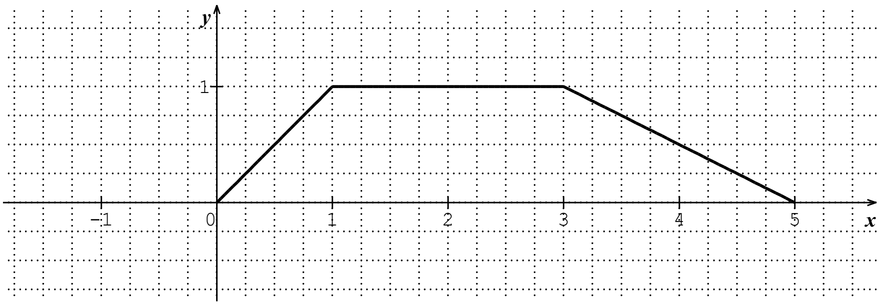
$$\int_{-2}^{k}(-2x+3)dx = -8$$

Exercice 6 : On donne le graphe d'une fonction. Esquisser le graphe de sa dérivée.

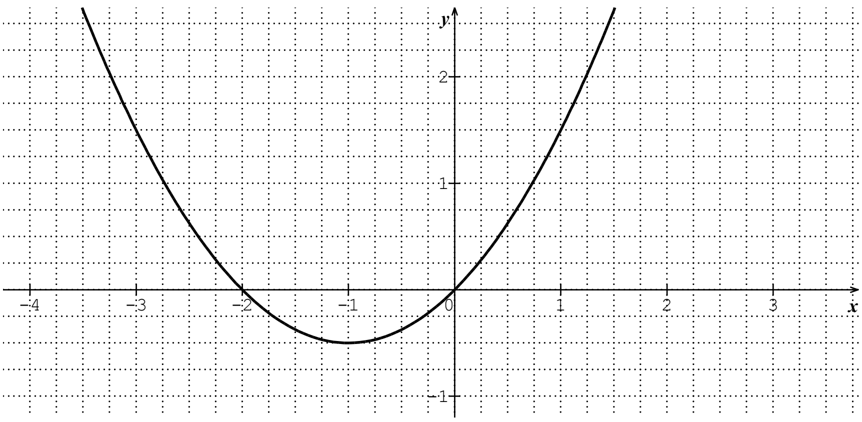
a)



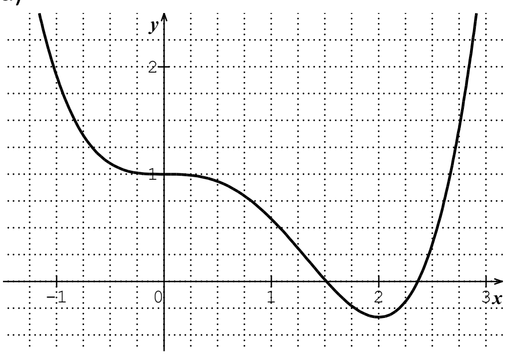
b)



c)



d)



Plus d'exercice ? Voir Fundamentum de mathématiques Analyse, p.81 ex 3.8

Solution Série de révisions

Solutions exercice 1:

a) $f'(x) = 4$ b) $f'(x) = 0$ c) $f'(x) = -1$ d) $f'(x) = 40x^7 - 9x^2 + 4x$ e) $f'(x) = 6x^7 - x^2 + \frac{5}{2}x$

f) $f'(x) = 20x(5x^2+1) = 100x^3 + 20x$ g) $f'(x) = 5x^9 + 6x^2$ h) $f'(x) = 8x(5x^8 - x^6 - 1)$

i) $f'(x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$ j) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$ k) $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$ l) $f'(x) = 102x(x^2+1)^{50}$

m) $f'(x) = \frac{(5x-3)^2(-10x+3)}{(1-2x)^3}$ n) $f'(x) = 2x^3 - 7x^2 - 2x$ o) $f'(x) = 60x(3x^2-1)^9$

p) $f'(x) = -2\sin(2x)$ q) $f'(x) = 0$ r) $f'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)} + 1 = 2\tan^2(x) + 3$

Solutions ex 2:

a) $T_a(x) = 4x - 3$ b) $T_a(x) = \sqrt{2}$ c) $T_a(x) = -x$ d) $T_a(x) = 35x - 31$ e) $T_a(x) = \frac{15}{2}x - \frac{10}{3}$
f) $T_a(x) = 120x - 84$ g) $T_a(x) = 11x - \frac{17}{2}$ h) $T_a(x) = 24x - 24$ i) $T_a(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
j) $T_a(x) = -3x + 4$ k) $T_a(x) = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$ m) $T_a(x) = 28x - 20$ n) $T_a(x) = -7x + \frac{31}{6}$
o) $T_a(x) = 30720x - 29696$

Solution ex 3 A

1) $F(x) = 2x^2 + 3x + C$ **2)** $F(t) = 3t^3 - 2t^2 + 3t + C$ **3)** $F(x) = 4\frac{x}{3} - 4x^2 + x + C$

4) $F(z) = -\frac{1}{2z^2} + \frac{3}{z} + C$ **5)** $F(x) = \frac{1}{9}(3x-1)^3 + C$ **6)** $F(x) = \frac{1}{12}(3x-1)^4 + C$

7) $F(x) = \frac{1}{24}(3x-1)^8 + C$ **8)** $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$ **9)** $F(u) = \frac{3}{4}\sin(u) + C$

10) $F(x) = \frac{1}{5}\cos(x) + C$ **11)** $F(x) = a^2x + C$ **12)** $F(u) = (b - a^2)u + C$

13) $F(x) = \frac{3x^5}{5} + C$ **14)** $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C$ **15)** $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + C$

16) $F(x) = \frac{1}{9}(x+1)^9 + x + C$ **17)** $F(x) = -\frac{1}{14}(2-x)^{14} + C$ **18)** $F(x) = \frac{1}{3}(3x^2+1)^3 + C$

19) $F(x) = -\frac{1}{x-1} + C$ **20)** $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + C$ **21)** $F(x) = \frac{1}{6}(x^2 - 3x + 1)^6 + C$

22) $F(x) = 4x - \frac{2}{x} + \frac{5}{3x^3} + C$ **23)** $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + C$ **24)** $F(x) = \frac{1}{21}(3x+2)^7 + C$

25) $F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$ **26)** $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$ **27)** $F(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 5x + 6)^{\frac{3}{2}} + C$

28) $F(x) = 2\sqrt{9 + x^3} + C$ **29)** $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$ **30)** $F(x) = \frac{1}{2}\tan(2x) + C$

31) $F(x) = \frac{1}{8}\sin(4x) + C$ **32)** $F(x) = \frac{1}{6}\sin^6(x) + C$ **33)** $F(x) = -\frac{1}{5}\cos^5(x) + C$

34) $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(x))^2 + C$ **35)** $F(x) = \frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+1)^3} + C$ **36)** $F(x) = \frac{5}{3}\sqrt{3x^2 - 2} + C$

B : 1) $\frac{27}{4}$ 2) 0 3) 4 4) $\frac{32}{15}$ 5) $\frac{1}{6}$ 6) $2\sqrt{2} - \frac{5}{2}$ 7) $\frac{14}{3}$ 8) $-\frac{7}{3}$ 9) $\frac{7}{3}$ 10) $-\frac{2}{3}$ 11) $\frac{98}{3}$ 12) $-\frac{9}{4}$ 13) $\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3}$ 14) 3 15) $\frac{5}{12}$ 16) $-\frac{5}{147}$ 17) $\frac{5}{2}$ 18) $\frac{20}{3}$ 19) 0 20) $2(6a^5 + b)$ 21) $\frac{\pi}{3}$

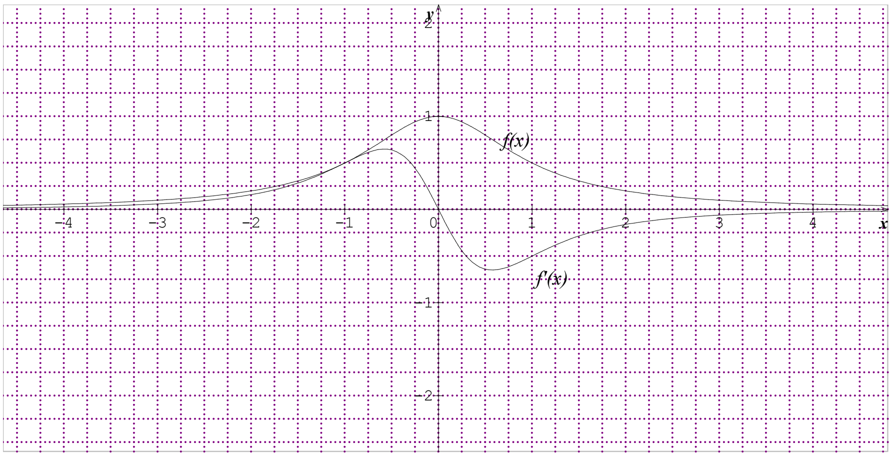
Exercice 4 :

a) $-\pi/2$ b) $\pi - 1$ c) $\pi - 2$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{116}{15}$ f) 14,03

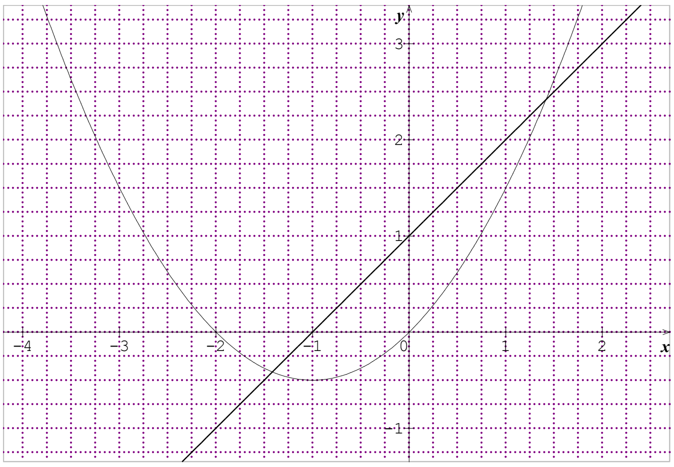
Exercice 5 :

$k = 6$ et $k = -3$

Solutions ex 6 :

a) 

c)



d)