Analyse

Introduction :

Ce chapitre est la continuité de celui commencé en troisième année. A l'aide des réflexes acquis en fin d'année (règles de dérivation), nous allons définir l'opération inverse de la dérivée. Nous étudierons ensuite un nouvel outil : ***les intégrales***. Il sera possible de découvrir ses propriété qui sont importantes dans le chapitre des probabilités.

Dans un deuxième temps, nous aurons le plaisir de redécouvrir les fonctions exponentielle et logarithme pour les étudier dans le contexte d'études de fonctions et dans le chapitre des probabilités.

Matériel :

- Monographique CRM n°25 : *FUNDAMENTUM de mathématique ANALYSE*

  pour la théorie et les exercices **en cours**
- *Formulaires et tables CRM,* pour **les épreuves** (et cours)
- Ce polycopié d'analyse
- Des séries d'analyse distribuées en cours
- Le polycopié d'analyse et les séries d'exercices de 3e
- Une calculatrice non programmable
- Monographie CRM n°27: *Notions élémentaires*

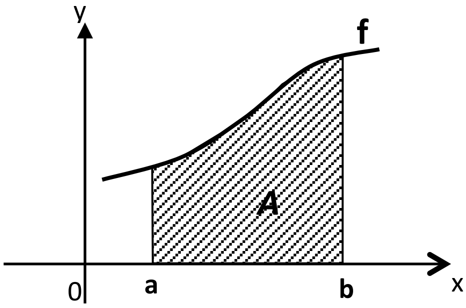
  (pour les notions acquises en 1ere et 2eme)

1. Introduction

Considérons une fonction f continue et positive sur $[a; b]$, $a < b$.

<u>But :</u> Calculer, sur un intervalle $[a; b]$, l'aire « sous une courbe donnée f », i.e. : l'aire délimitée par : f, l'axe Ox et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$

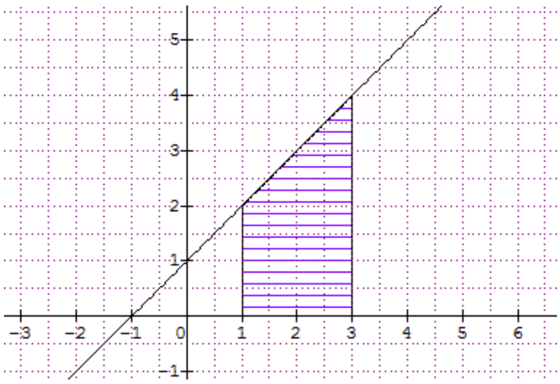
Illustration :



Pour une fonction de degré 1, il est facile de calculer l'aire sous la courbe entre deux bornes à l'aide de géométrie élémentaire.

Exemple simple: Soit $f(x) = x + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

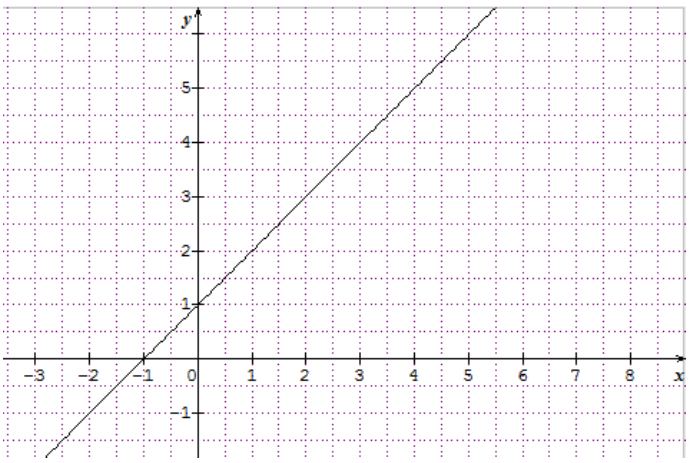
1) $[a; b] = [1; 3]$



l'aire sous f est :

2) $[a; b] = [1; x]$ où x est un nombre, arbitrairement choisi, supérieur à 1.

L'aire sous f, notée $A(x)$, est :



Cette fonction a permet donc de calculer l'aire sous f sur un intervalle quelconque ayant pour borne inférieure 1.

Par exemple, l'aire sous f entre a et 100 vaut $A(100)$, i.e. :

Remarques :

1) Dans cet exemple, il y a une relation entre f et A, à savoir :

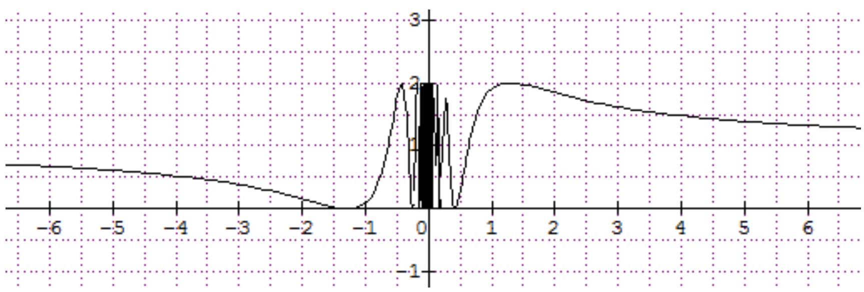
   Car :

2) Ce type de relation et une méthode générale permettant de calculer l'aire sous une courbe font l'objet des paragraphes suivants.

Remarque:

La notion d'aire sous la courbe n'est pas une notion évidente.

Pour la fonction représentée ci-dessous, f$(x) = \sin\left(\frac{2}{x}\right) + 1$, l'aire sous la courbe entre 0 et 1 existe-t-elle vraiment ?



➢ ***Analyse Série 1 exercice 1 à 3***

2. Primitives

2.1 Fonction continue

But : Etant donné une fonction continue f, déterminer une fonction, notée F, dont la dérivée est f
i.e . : déterminer F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Idée simple : utiliser « à l'envers » les théorèmes de dérivation.

Exemples :

1) $f(x) = x^3$ il faut déterminer F telle que $F'(x) = x^3$ Thm de dérivation : $(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{nx^{n-1}}$
i.e. : en dérivant une fonction puissance, le degré « descend » d'une unité, d'où il faut choisir F de degré 4.
Mais $(x^4)' = 4x^3$ pour retrouver f il faut donc « compenser » le facteur 4 en multipliant par son inverse $1/4$.
Finalement : $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ ou $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2$ ou $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 15$

2) $f(x) = 2\sin(x)$ il faut déterminer F telle que $F'(x) = 2\sin(x)$
Thm de dérivation : $(\boldsymbol{\alpha f})' = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{f})'$; i.e. : α (ici 2) peut être « sorti »
Et : $[cos(x)]' = -\sin(x)$ donc $[-\cos(x)]' = \sin(x)$
Finalement : $F(x) = -2\cos(x)$ ou $F(x) = -2\cos(x) - 3$ ou ...

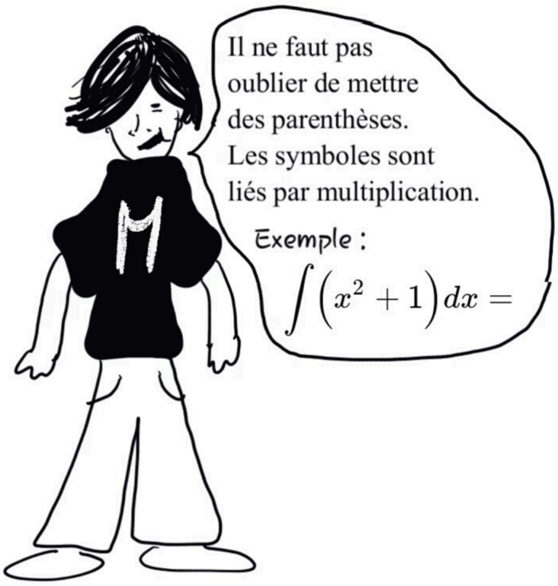
3) $f(x) = x^3 + 2\sin(x)$
il faut déterminer F telle que $F'(x) = x^3 + 2\sin(x)$
Thm de dérivation : $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$
i.e. : il est possible de traiter x^3 et $2\sin(x)$ séparément.
Finalement : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2\cos(x)$ ou $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2\cos(x) + 8$ ou ...

4) $h(x) = \cos(3x - 1)$ il faut déterminer H telle que $H'(x) = \cos(3x - 1)$
Comme $\cos(3x - 1)$ est une fonction **composée** (i.e. : type $g \circ f$), il faut se référer au Thm de dérivation $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})' = (\boldsymbol{g}' \circ \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{f}'$
Comparons : $\cos(3x - 1)$ pour jouer le rôle du terme $g'(f(x))$
On a : $g'(y) = \cos(y)$ et $f(x) = 3x - 1$ Donc : $g(y) = \sin(y)$ et $f'(x) = (3x - 1)' = 3$
Comme $g'(f(x)) \cdot f(x) = \cos(3x - 1) \cdot 3$ et comme $h(x)$ ne contient par $(\cdot\, 3)$, il faut effectuer une « compensation » par l'inverse de 3, à savoir 1/3.
Donc : $H(x) = \frac{1}{3}(g \circ f)(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - 1)$ ou $H(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - 1) - 5$ ou ...

5) $h(x) = (x^2 + 5)^3 \cdot 2x$ il faut déterminer H telle que $H'(x) = (x^2 + 5)^3 \cdot 2x$
comme $(x^2 + 5)^3$ est une fonction composée, le Thm de dérivation est $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})' = (\boldsymbol{g}' \circ \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{f}'$
Comparons : $(x^2 + 5)^3 \cdot 2x$ avec $g'(f(x)) \cdot f'(x)$
On a : $g'(y) = y^3$ et $f(x) = x^2 + 5$ Donc : $g(y) = \frac{1}{4}y^4$ et $f'(x) = (x^2 + 5)' = 2x$ OK
Donc : $H(x) = (g \circ f)(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 5)^4 + 10$ ou $H(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 5)^4$ ou ...
Vérification : $H'(x) = \frac{1}{4}4(x^2 + 5)^3(x^2 + 5)' = (x^2 + 5)^3 2x = f(x)$

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Une **primitive de f sur I** est une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I

Notation :



Pour des raisons qui deviendront évidentes par la suite, une primitive de f sera aussi notée $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ et appelée **intégrale indéfinie de f**.

Exemples :

- $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R}$ car $\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = x^2 + 0 = x^2$

- $\int(x^2+1)\,dx =$

Remarques :

1) de la définition, on déduit qu'une primitive est forcément dérivable sur I et donc continue sur I.
D'où :
une primitive d'une fonction continue est elle-même continue.

2) Certains théorèmes de dérivation : $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; $(fg)' = f'g + fg'$ sont difficilement utilisables « à l'envers »

3) Des exemples 4) et 5) on peut tirer la « règle » suivante :
pour « primitiver » une fonction composée, il faut « primitiver » la fonction extérieure, puis « compenser » la dérivée de la fonction intérieure, si nécessaire.

Théorème 1 : *Deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante.*

1) Si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives de $f(x)$ sur I
   Alors $F(x) - G(x)$ est une fonction constante.

2) Si $F(x)$ une primitive de $f(x)$ sur un intervalle I et soit C une fonction constante.
   Alors $F(x) + C$ est une primitive de $f(x)$.

Démonstration : $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ signifie : $F'(x) = f(x)$

1) $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in I$
   Comme la dérivée de $F - G$ est la fonction nulle, selon un corollaire des accroissements finis[1], $F - G$ est une fonction constante.

2) $[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x) \Leftrightarrow F(x) + C$ est une primitive de $f(x)$.

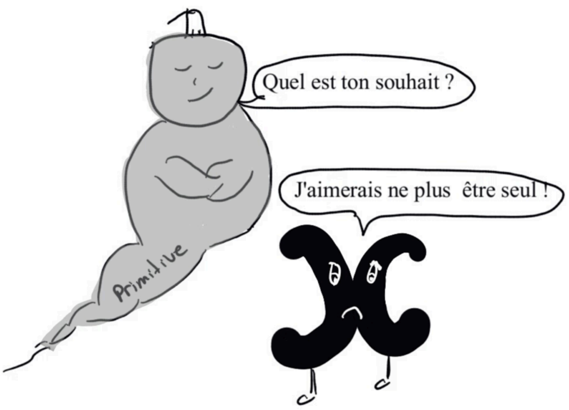
Conséquence pratique directe :

Pour déterminer toutes les primitives d'une fonction continue f, il suffit d'en déterminer une et de lui ajouter une constante arbitraire.

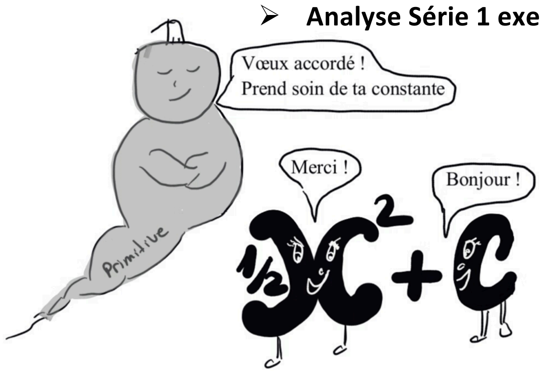
Exemple : $f(x) = 3x^7$ d'où : $F(x) = \frac{3}{8}x^8 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Théorème 2 : $c \in \mathbb{R}$

a) Si $f(x) = x^m$ et $m \neq 1$ Alors $F(x) = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c$
b) Si $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ Alors $F(x) = \ln(|x|) + c$
c) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ admet pour primitives $F(x) = \ln(|f(x)|) + c$
d) $\alpha \cdot f$ admet pour primitives $H(x) = (\alpha \cdot F) + c, \alpha \in \mathbb{R}$
e) $f + g$ admet pour primitives $H(x) = F + G + c$
f) $(g \circ f) \cdot f'$ admet pour primitives $H(x) = (G \circ f) + c$



- **Analyse Série 1 exercice 3 + 4**



[1] **Corollaire 2 du TAF:** Soit $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, *(f satisfait aux hypothèses du théorème de Lagrange)* et si: $f'(x) = 0, \forall x \in]a; b[$ alors f est constante sur $[a; b]$.

Trois cas d'intégration pour les produits :

Cas 1 : Regrouper un produit sous une même base à l'aide des propriétés des puissances

Exemple : $\int x \cdot \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$

$$\boxed{\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}}$$

Exemple : $\int \frac{x^3+2}{x^2} dx =$

Cas 2 : Composée de fonctions

Rappel de la formule de dérivation d'une fonction composée : $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

donc : $\boxed{\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x))}$

Exemple : $\int x(x^2-1)^4 dx$ il faut identifier ici deux fonctions : une principale qui est dérivée mais en gardant une fonction g à l'intérieur et une autre qui est la dérivée de la fonction g *(à constante près):*

On choisit donc $g(x) = x^2 - 1$ et on remarque que sa dérivée serait $g'(x) = 2x$ on remarque qu'il manquerait donc la constante 2. On peut la rajouter :

$$\int x(x^2-1)^4 dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^4 dx$$

On identifie donc que la fonction $f'(x) = x^4$ donc on trouve rapidement : $f(x) = \frac{1}{5}x^5$

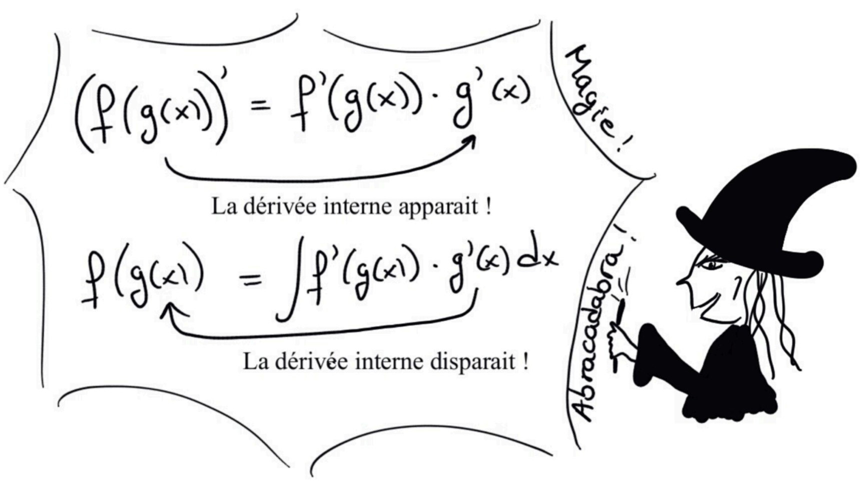
on peut ensuite continuer à déterminer la primitive cherchée :

$$\int x(x^2-1)^4 dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-1)^4 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}(x^2-1)^5\right) + c$$

Astuce : Vérifier en dérivant :

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}(x^2-1)^5\right) + c\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}((x^2-1)^5)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot 5(x^2-1)^4 \cdot (2x) = x(x^2-1)^4$$

comme on trouve l'énoncé de départ, on sait qu'on a trouvé la bonne primitive.



Cas 3 : Intégration par partie :

Comme la méthode précédente, on part d'une formule de dérivation :

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

On obtient alors :

$$\int (f \cdot g)' = \int (f' \cdot g + f \cdot g') = \int (f' \cdot g) + \int (f \cdot g')$$

Astuce: isoler un autre terme:

$$\boxed{\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'}$$

Exemple : $\int x \cdot \sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = -x\cos(x) + \sin(x)$

avec $f'(x) = \sin(x)$ *donc* $f(x) = -\cos(x)$
et $g(x) = x$ *donc* $g'(x) = 1$

Avantage de cette méthode : permet de faire "disparaitre" la partie où l'on doit chercher la primitive d'un produit. Il faut chercher la primitive d'une fonction et la dérivée de l'autre. On prend donc la fonction polynômiale comme fonction à dériver (elle "disparaitra" au bout du nombre de dérivation qu'il a de degré)

➢ ***Analyse Série 1 exercice 3 et 4 & AS2 ex 1 + 9 + 10 + AS3 ex 10***

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Primitive

Une fonction F est une *primitive* d'une fonction f dans l'intervalle I si $F'(x) = f(x)$ dans I.

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors $F_2 = F_1 + c$ où c est une constante.
On note $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ une primitive quelconque de f.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	ax	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x-b}\right\rvert$	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\log_a(x)$	$x(\log_a(x)-\log_a(e))$
xe^{ax}	$\frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}$	$x\ln(ax)$	$\frac{x^2}{4}(2\ln(ax)-1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\text{arccot}(x)$	$x\,\text{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan^2(x)$	$\tan(x)-x$	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right\rvert$
$\cot^2(x)$	$-\cot(x)-x$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right\rvert$

2.2 Fonction continue par morceaux et rôle de la constante c

Ce paragraphe sera très important dans le chapitre des *probabilités*, avec la notion de fonction de répartition pour les variables aléatoires continues.

Exemple 1 :

Considérons $f(x) = |x|$

f est continue sur $\mathbb{R}$, mais d'une expression algébrique différente suivant que x soit positif ou négatif, à savoir :

$$f(x) = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c_1\ , si\ x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + c_2\ \ , si\ x < 0 \end{cases}$$

F doit être continue sur $\mathbb{R}$, mais le seul problème se pose pour $x = 0$; vérifions :

$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x^2 + c_1 = c_1$ $\lim\limits_{x \to 0^-} F_c(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{1}{2}x^2 + c_2 = c_2$

Pour que la fonction soit continue, il faut que $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$ donc que $c_1 = c_2$

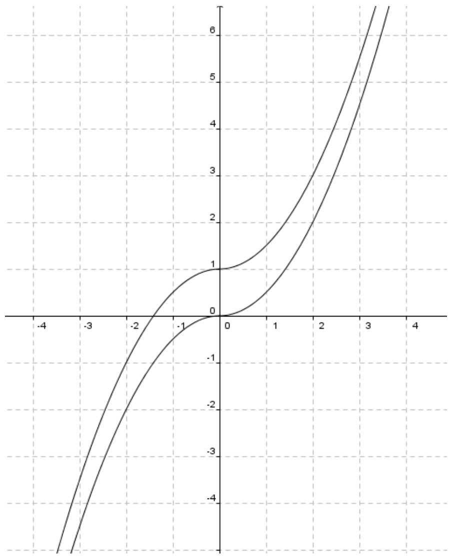
Notons : $c_1 = c_2 = c$

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = c$ pour que F soit continue

$F(0) = c$; comme $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0)$; F est continue en 0.

Conclusion : $F_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + c\ , si\ x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + c\ \ , si\ x < 0 \end{cases}$

A titre d'exemples, représentons graphiquement F_0 et F_1 ci-contre :



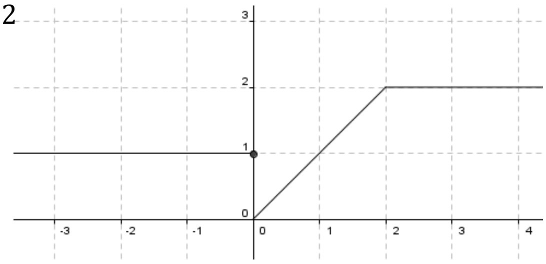
Constatation : la constante permet de translater le graphique.
Il reste à examiner le rôle « algébrique » de la constante :
une fonction possède une « infinité de primitives, mais elle n'en possède qu'une qui passe par un point donné ; on la détermine en calculant la valeur que doit prendre la constante.

Exemple : déterminer la primitive de la fonction définie par $f(x) = |x|$; qui passe par le point $(4; 5)$.

On a : $F_c(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c \text{ pour } x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c\ pour\ x < 0 \end{cases}$

Exemple 2 :

Considérons maintenant une autre fonction : $f(x) = \begin{cases} 1, si\ x \leq 0 \\ x, si\ 0 < x \leq 2 \\ 2, si\ x > 2 \end{cases}$



f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$

Cherchons une primitive :

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_2, si\ 0 < x \leq 2 \\ 2x + C_3, si\ x > 2 \end{cases}$$ est un candidat.

Cette fonction F vérifie $F'(x) = f(x)$ pour tout x sauf 0 et 2 selon les valeurs données aux constantes C_1, C_2 et C_3.

En effet, F n'est pas forcément continue en 0 ou en 2 et une fonction non continue est forcément non dérivable. Cherchons à rendre F continue en 0 et en 2, donc sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, il faut : $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$ et que $\lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} F(x)$

Donc que : $\lim\limits_{x \to 0^-}(x + C_1) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right)$ et que $\lim\limits_{x \to 2^-}\left(\frac{1}{2}x^2 + C_2\right) = \lim\limits_{x \to 2^+}(2x + C_3)$

Donc que : $C_1 = C_2$ et que $2 + C_2 = 4 + C_3$

F est continue sur $\mathbb{R}$ si $C_1 = C_2$ et si $C_3 = -2 + C_1$

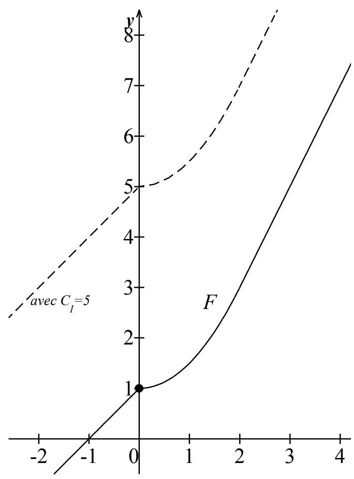
Finalement, $F(x) = \begin{cases} x + C_1,\ si\ x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + C_1,\ si\ 0 < x \leq 2 \\ 2x - 2 + C_1,\ si\ x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

De plus, cette fonction vérifie $F'(x) = f(x)$ sauf en $x = 0$ (F est en effet dérivable en 2)

Par exemple, en choisissant $C_1 = 1$, le graphe de F est le suivant :

En choisissant $C_1 = 5$, nous obtiendrons une autre primitive de f. Son graphe sera identique à celui représenté ci-contre mais situé 4 unités plus haut.

Remarque : Pour que notre candidat soit une primitive de f, il faut qu'il soit continu sur $\mathbb{R}$.



Définition : Si f est <u>une fonction continue par morceaux</u>, On dit que F est une ***primitive*** de f sur I si:
1) F est continue sur I
2) $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ sauf ceux en lesquels f est discontinue

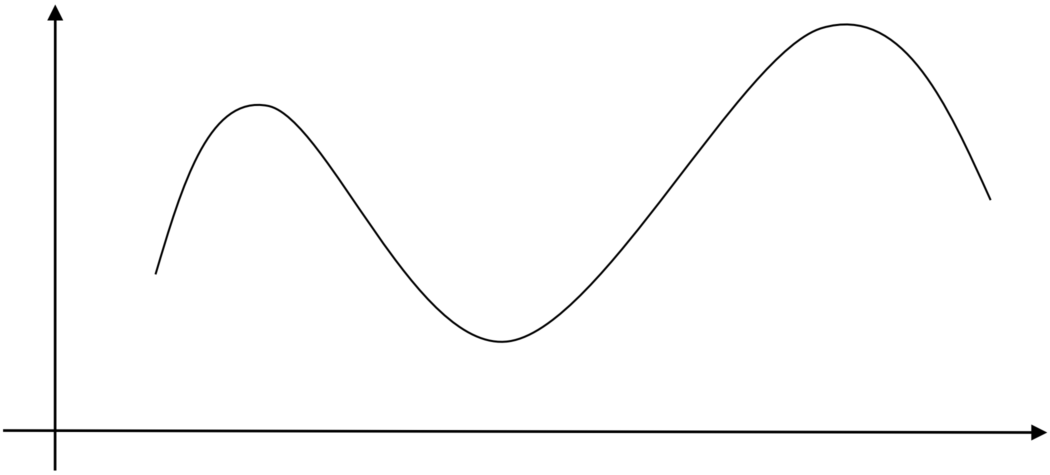
➢ **Analyse Série 2 & Livre Analyse p.96-97 ex 3.83 à 3.85**

3. Calcul intégral

3.1 Somme de Riemann[2]

But : Etant donné une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, calculer l' « aire sous f » entre a et b.

Illustration :



Idée simple : approcher l' « aire sous f », le plus finement possible, par une **somme d'aires de rectangles**.

Démarche :

1) Partager $[a;b]$ en n intervalles de même longueur : $\frac{b-a}{n} = \Delta x$
(dans l'illustration $n =$)

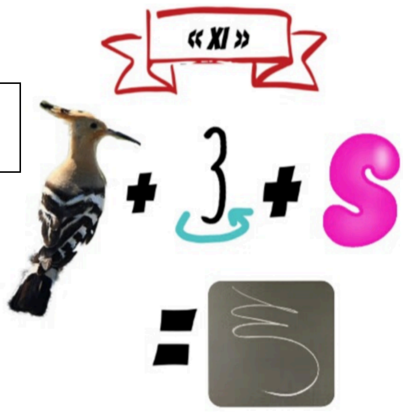
2) Dans chaque intervalle noté $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1; 2; 3; \dots; n)$, choisir arbitrairement un nombre noté ξ_k *(dans l'illustration $k \epsilon \{1; 2; \dots;\ \}$)*

3) Dans chaque intervalle, remplacer f par la fonction constante $x \mapsto f(\xi_k)$
(donc sur $[a;b]$, f est remplacée par une fonction « escalier » qui dépend de la manière initiale de partager $[a;b]$ et du choix des nombres ξ_k).

4) L'aire comprise entre cette fonction « escalier » et l'axe Ox vaut :

$$\boxed{\Delta x \cdot f(\xi_1) + \Delta x \cdot f(\xi_2) + \dots + \Delta x \cdot f(\xi_n)}$$

Cette expression algébrique s'appelle une **somme de Riemann**,
se lit : « somme pour k compris entre 1 et n de
et se note :



$$\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\Delta x$$

[2] CRM n°25, p. 169

Pour que la somme de Riemann approche le plus finement possible l' « aire sous f », une condition est nécessaire :
Le nombre d'intervalle du partage devienne de plus en plus grand,
i.e. : $\boldsymbol{n}$ **augmente indéfiniment**.

Conséquence :
La longueur de chaque intervalle du partage devient de plus en plus petite,
i.e. : $(\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{x_{k-1}})$ **diminue toujours plus**.

Passer à la limite ; l' «aire sous$f$ » correspondra alors à :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\Delta x$$

> *Définitions :*
>
> 1) si la limite ci-dessus existe dans $\mathbb{R}$, f est appelée ***fonction intégrable*** sur l'intervalle $[a;b]$.
> 2) la limite ci-dessus est alors appelée ***intégrale définie*** de f sur $[a;b]$ et notée :$\int_a^b f(x)dx$
> i.e. :
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\ \Delta x$$

Remarques :

1) Il est possible de montrer que l'intégrale définie de f sur $[a;b]$ est la même quels que soient le partage choisi de $[a;b]$ et les nombres choisis à l'intérieur de chaque intervalle du partage.
En d'autres termes :
$\int_a^b f(x)dx$ ne dépend que de la fonction f et de l'intervalle $[a;b]$
2) La notation $\int_a^b f(x)dx$ est une déformation de la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x$$

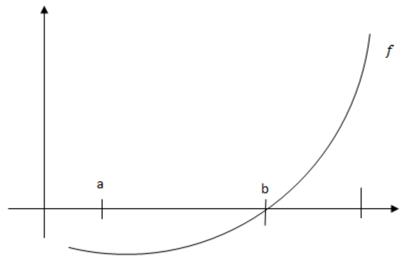
Les nombres a et b s'appellent les bornes d'intégration alors que x est la variable d'intégration.
La variable d'intégration peut changer :

$$\int_a^b f(t)dt; \int_a^b f(y)dy \ ; \ldots$$

mais la notation $\int_a^t f(t)dt$ n'a pas de sens.
$\int_a^b f(x)dx$ est parfois simplement notée $\int_a^b f$.

3) a) Si $f(x) \geq 0$ sur $[a;b]$ (comme illustrations p.7) alors $\int_a^b f(x)dx$ correspond à l' « aire sous f entre a et b ».

b) Si $f(x) \leq 0$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ sera négative.
Il s'agit alors de **l'aire algébrique**.



Donc l'aire hachurée (ou **aire géométrique**) vaudra : $-\int_a^b f(x)dx$
Autrement dit : l'aire géométrique vaudra : $\int_a^b |f(x)|dx$.

c) Si f change de signe sur $[a;b]$,

alors $\int_a^b f(x)dx$ peut être positive (comme ci-contre)

ou négative (si la partie de f située sous l'axe Ox l'emporte)

L'aire hachurée ne vaudra donc ni $\int_a^b f(x)dx$ ni $-\int_a^b f(x)dx$

L'aire hachurée (ou aire géométrique) de l'illustration ci-contre vaut : $-\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Autrement dit: l'aire géométrique vaut: $\int_a^b |f(x)|dx$.

4) Si f n'est pas une fonction constante, calculer $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la définition (page 8) devient vite très compliqué.

Le théorème suivant, appelé **théorème fondamental du calcul intégral** et que nous démontrerons plus loin, permet un calcul plus simple :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{où } F \textit{ est une primitive de } f.}$$

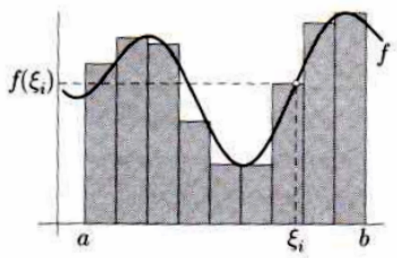
Exemple : $\int_1^3 x^2 dx =$

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

Intégrale de Riemann

On note f une fonction continue sur $[a;b]$. On choisit une subdivision $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a;b]$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) et ξ_i un nombre de l'intervalle $[x_{i-1}; x_i]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{où } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$$



Théorème de Riemann :

<u>Si</u> f est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$
<u>Alors</u> f est intégrable sur $[a;b]$

Ce théorème ne sera pas démontré dans ce cours.

Il nous assure l'existence de la limite $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1}) \cdot f(\xi_k)$ pour chaque fonction continue sur l'intervalle fermé $[a;b]$

Reste à trouver le moyen de calculer une telle limite !

Propriétés de l'intégrale :
Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a;b]$et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

1) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$
2) $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ *l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales*
3) $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ *l'intégrale d'une différence est égale à la différence des intégrales*
4) $\int_a^a f(x)dx = 0$
5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
6) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $,\forall x \in [a;b]$
7) Si $f(x) \geq 0$ $\forall \in [a;b] alors$ $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
8) Si $f(x) \leq 0$ $\forall \in [a;b] alors$ $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
9) Si $f(x) \geq g(x)$ $\forall \in [a;b] alors$ $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

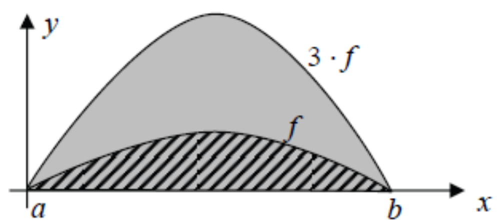
Démonstrations et exemples :

1)Démonstration à l'aide de la définition de l'intégrale, de propriété des sommes et propriété des limites :

$\int_a^b \lambda \cdot f(x)dx =$

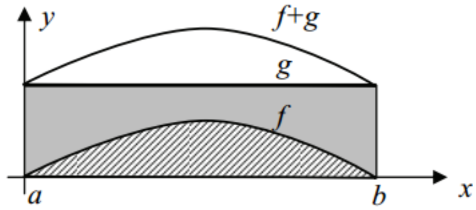
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \lambda \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x = \lim_{n\to\infty} \lambda \cdot [\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k) \cdot \Delta x] = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k) \cdot \Delta x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Illustration : $l'aire\ grise = 3 \cdot l'aire\ hachurée$



2) Cette propriété semble évidente si l'on considère sa signification géométrique (f et g positives)

Illustration :



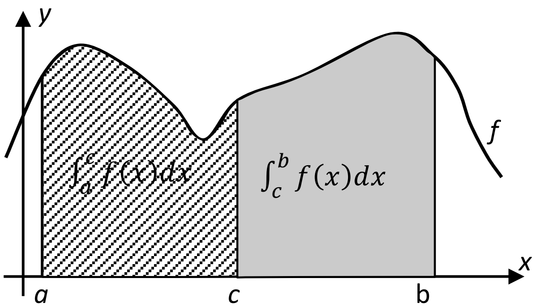
$l'aire\ sous\ la\ courbe\ f + l'aire\ sous\ la\ courbe\ g =$
$l'aire\ sous\ la\ courbe\ f + g$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}(f(\xi_k)+g(\xi_k))\cdot\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\cdot\Delta x + g(\xi_k)\cdot\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\cdot\Delta x + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\cdot\Delta x]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} f(\xi_k)\cdot\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} g(\xi_k)\cdot\Delta x$$
$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3) Même raisonnement qu'en 2)

4) L'aire est nulle puisque l'intervalle considéré est $[a;a]$ qui est de longueur 0.

6)

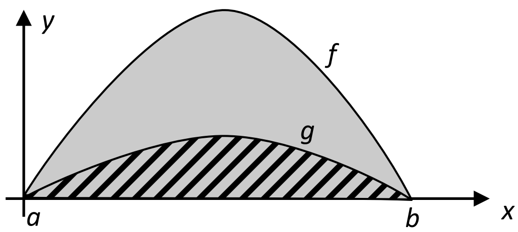


$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7) et 8) voir remarques p.9

9) Cette propriété semble évidente si l'on considère sa signification géométrique ($f\ positive$)

Si $f(x) \geq g(x)\ \forall\in [a;b] alors\ \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$



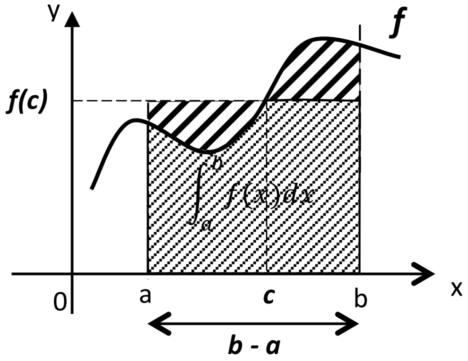
➢ **Analyse Série 3 exercices 1 à 6**

3.2 Théorème de la moyenne et fondamental[3]

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le calcul de l'intégrale devient immédiat lorsque nous connaissons une primitive de la fonction f. Pour le démontrer, il nous faut un autre théorème :

Théorème de la moyenne : Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ Alors il existe au moins un nombre $c \in [a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$

Illustration : Cela revient à remplacer l'aire sous f entre a et b par l'aire d'un rectangle de base $\overline{ab}$ et de hauteur $f(c)$



➢ ***Analyse Série 3 exercices 7***

Démonstration :

Cas 1 : Si f est une fonction constante, le théorème est évident puisque l'aire sous la courbe entre a et b est déjà de la forme d'un rectangle.

Cas 2 : Si f est une fonction non constante.

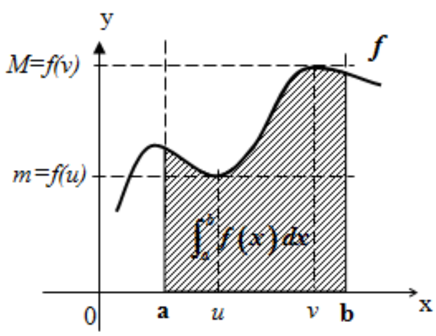
Comme f est continue sur $[a;b]$ fermé, le *théorème de la valeur intermédiaire*[4] dit qu'il existe un nombre $u \in [a;b]$ tel que $f(u) = m$ (minimum sur $[a;b]$) et il existe un nombre $v \in [a;b]$ tel que $f(v) = M$ (maximum sur $[a;b]$).

On a donc pour tout $x \in [a;b]$:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Selon la propriété 9 de p. 12 :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$



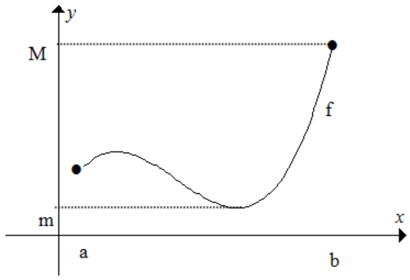
Puisque $\int_a^b m dx$ correspond à l'aire sous la courbe constante m entre a et b, cela revient à déterminer l'aire l'un rectangle de base $b-a$ et de hauteur m.

On peut donc écrire : $\int_a^b m dx = m \cdot (b-a)$

[3] CRM n°25, p. 171-172

[4]
Théorème de la valeur intermédiaire (Bolzano-Weierstrass) : L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé. C'est-à-dire : $f([a;b]) = [m;M]$

On peut appliquer le même raisonnement pour $\int_a^b M dx = M \cdot (b-a)$



On peut alors écrire : $$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Donc $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in [m; M] = f([a; b])$

Donc selon le théorème de la valeur intermédiaire, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est l'image d'au moins un nombre c de $[a; b]$

$$\Rightarrow \exists c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$\Rightarrow f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ pour au moins un point c de $[a; b]$. $CQFD$

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

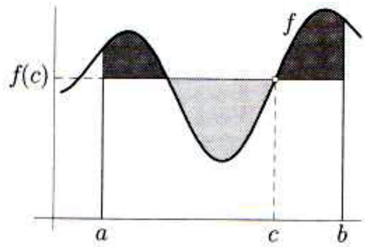
Théorème de la valeur intermédiaire

Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a\,;b]$ admet sur cet intervalle un maximum absolu, un minimum absolu, et prend toutes les valeurs entre ces extremums.

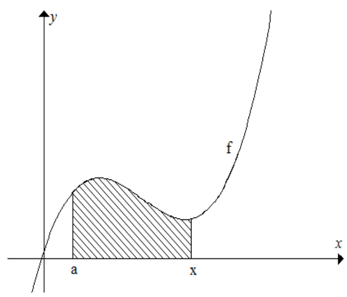
Théorème de la moyenne

On définit la *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$ par $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(c) = \mu$



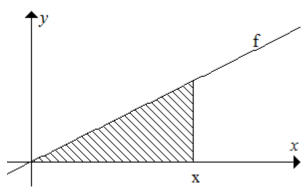
Jusqu'ici, nous avons toujours considéré l'intégrale comme un nombre pouvant représenter l'aire d'une surface entre deux bornes fixes a et b. Si maintenant nous considérons a comme une borne fixe et que nous laissons prendre à b différentes valeurs, nous obtiendrons à chaque fois une aire différente qui dépendra de la valeur que nous aurons attribuée à b.



En d'autres termes, si b devient une variable (que nous noterons x par la suite), l'intégrale définit alors une fonction qui, à chaque valeur de x associe l'aire du domaine sous f entre a et x.

$A(x) = \int_a^x f(t)dt$ aire du domaine hachuré

Nous avions vu que la notation $\int_a^x f(x)dx$ n'a pas de sens. Il est nécessaire de distinguer la variable d'intégration t de la variable "borne d'intégration" x.



Exemple :

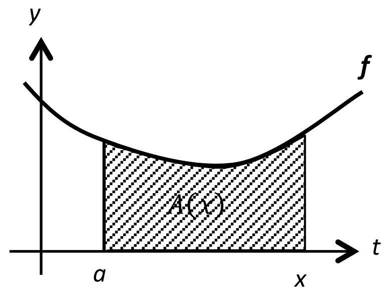
$f(x) = \frac{x}{2}, a = 0, J(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2}xf(x) = \frac{x^2}{4} = une\ primitive\ de\ f$

Théorème fondamental du calcul intégral :

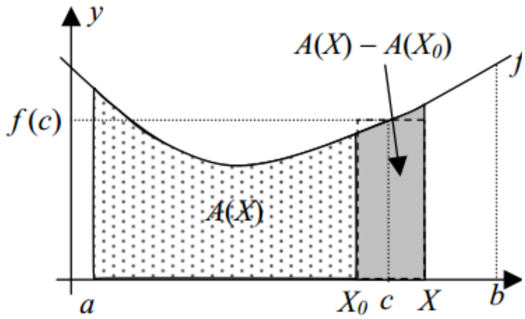
Soit f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$

Partie 1 :
Si A est la fonction définie par $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, $\forall x \in [a;b]$,
alors A existe et est la primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Partie 2 :
Si F est une primitive de f sur $[a;b]$,
alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.



Démonstration : **Partie 1 :** Existence : par hyp f est continue donc intégrable sur $[a;b]$donc A existe
A voir: $A'(x) = f(x), \forall x \in [a;b]$



On fixe un nombre $x_0 \in [a,b]$

$A'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}$ *Définition de la dérivée*

$= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt}{x-x_0}$ *Définition de A*

$= \lim_{x\to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt}{x-x_0}$ *Propriété des intégrales*

$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\cdot f(c)}{x-x_0}$ $avec\ c \in [x_0;x]$ *Théorème de la moyenne*

$= \lim_{x\to x_0} f(c)$ $(x \to x_0) \Rightarrow (c \to x_0)\ et\ f\ continue\ par\ hypothèse$

$= f(x_0)$

Comme x_0 est arbitrairement choisi, on peut généraliser et: $A'(x) = f(x)\ \forall x \in [a;b]$
Selon la définition de A, on peut écrire: $A(a) = \int_a^a f(t)dt$
et selon la propriété 4 des intégrales, $\int_a^a f(t)dt = 0$

Démonstration : **Partie 2 :** Nous avons vu qu'une fonction peut avoir une infinité de primitives, mais qu'alors ces primitives ne diffèrent que d'une constante (exemple : $f(x) = 2x$ a pour primitives $F(x) = x^2$ et $G(x) = x^2 + 5$; on voit alors que $G(x) = F(x) + 5$).

D'après la première partie du théorème fondamental, A est une primitive de f. Donc, en appelant F une autre primitive de f, nous pouvons affirmer que A et F ne diffèrent que d'une constante. Nous pouvons écrire : $A(x) = F(x) + c\ \forall x \in [a;b]$

En particulier, pour $x = a$; $\underbrace{A(a)}_{=0} = F(a) + c$ donc $0 = F(a) + c$ donc $c = -F(a)$

Ainsi: $A(x) = F(x) - F(a)\ \ \forall x \in [a;b]$

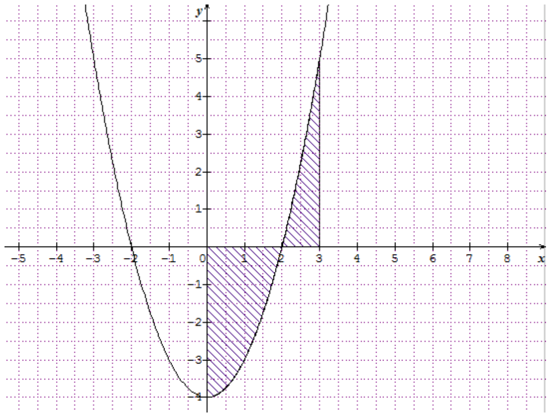
En particulier, pour $x = b$: $A(b) = F(b) - F(a)$

Donc: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ *CQFD*

Exemples de calculs :

a) La fonction représentée ci-contre est $f(x) = x^2 - 4$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$ est une primitive de f.



Aire algébrique du domaine hachuré:

$A = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 4)dx = F(3) - F(0) = -3$

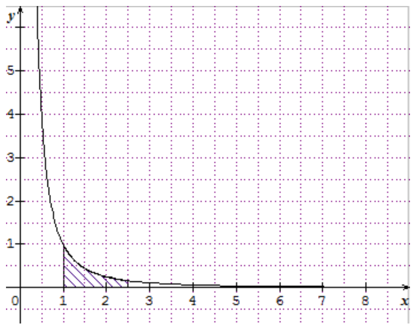
$F(3) - F(0)$ se note usuellement $[F(x)]_0^3$

Aire géométrique du domaine hachuré (superficie)

$S = -\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = -[F(x)]_0^2 + [F(x)]_2^3 = \frac{23}{3}$

b) La fonction ci-contre est $f(x) = \frac{1}{x^2}\ sur\ \mathbb{R}_+^*$

$F(x) = -\frac{1}{x}$ est une primitive de f



Aire du domaine sous f entre 1 et t $(t > 1)$

$A(t) = \int_1^t f(x)dx = [F(x)]_1^t = -\frac{1}{t} + 1$

L'aire est inférieure à 1 quelque soit le nombre $t > 1$ et cette aire tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. Un domaine illimité peut avoir une aire finie !

L'aire de ce domaine infini peut se noter: $\int_1^\infty f(x)dx$

Que trouve-t-on dans la table CRM à la page ?

Théorème fondamental du calcul intégral

Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

La fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

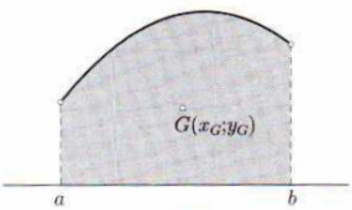
Aire de la surface

$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$ si $f \geq 0$

Centre de gravité de la surface

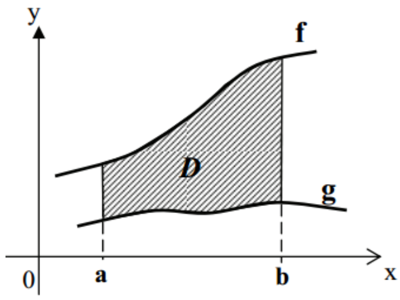
$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_a^b x f(x)\,dx$ si $f \geq 0$

$y_G = \frac{1}{2\mathcal{A}} \int_a^b (f(x))^2\,dx$



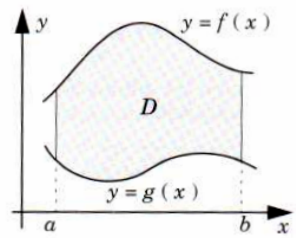
➢ ***Analyse Série 4***

3.3 Aire d'une région située entre deux courbes[5]



Soit f et g deux fonctions continues telles que $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a;b]$ et D le domaine borné limité par les graphes de f et g et par les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

But: calculer l'aire A du domaine D.

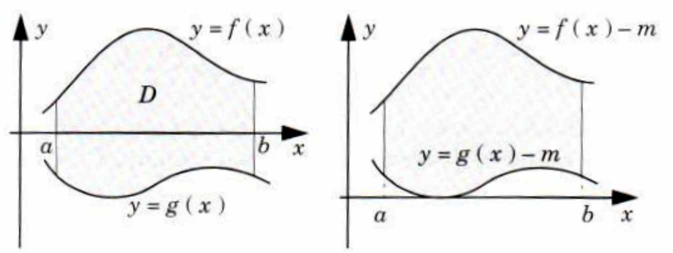


Cas 1: Si g est positive sur $[a;b]$, alors $A = \text{aire sous f} - aire\ sous\ g$

donc

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

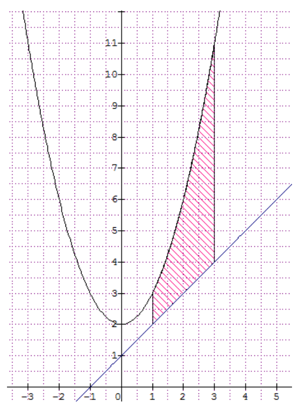
Cas 2: Si g prend des valeurs négatives sur $[a;b]$, on translate les graphes de f et de g vers le haut de façon que le domaine D soit au dessus de l'axe Ox.



Soit m le minimum de g sur $[a;b]$. Comme $g(x) \geq m, g(x) - m \geq 0$ et la fonction $g - m$ est positive sur $[a;b]$. Comme l'aire d'une région n'est pas modifiée par translation, l'aire A de la région limitée par f et g est la même que celle de la région limitée par $f - m$ et $g - m$. Ainsi:

$$A = \int_a^b \big(f(x) - m\big) - \big(g(x) - m\big)\big)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Exemple :



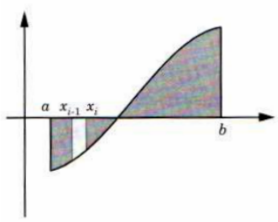
Calculer l'aire entre $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = x + 1$ et les verticales d'équations $x = 1$ et $x = 3$

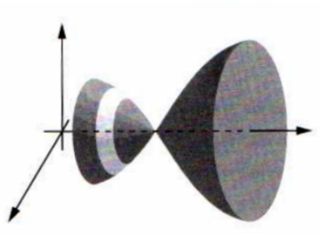
$$A = \int_1^3 \big((x^2 + 2) - (x + 1)\big)dx = \int_1^3 (x^2 - x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^3 = \frac{20}{3}$$

➢ ***Analyse Série 4 exercices 6, 7, 11, 13, 19 à 22***

[5] CRM n°25, Analyse, p. 176

3.4 Aire et superficie





Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et D le domaine borné limité par le graphe de f, l'axe Ox et les verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

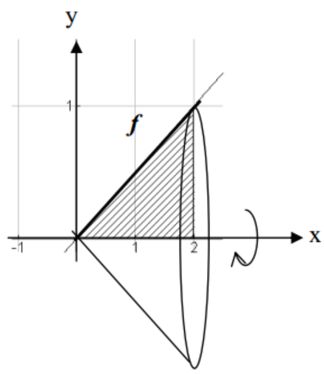
But : Calculer le volume V du solide engendré par la révolution de D autour de Ox.

Proposition : $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$

Démonstration :

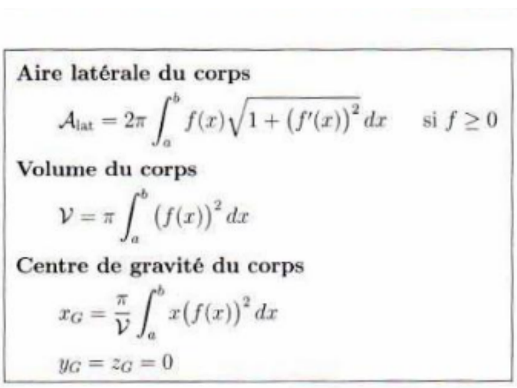
- Découpons l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles $[x_{k-1}; x_k]$ de même longueur Δx, $1 \le k \le n$. Le solide est alors partagé en n tranches.
- Soit m_k le minimum de f sur $[x_{k-1}; x_k]$. Le volume d'une tranche est compris entre celui d'un cylindre de rayon m_k et d'épaisseur Δx et celui d'un cylindre de rayon M_k.
- Si Δx est assez petit, le volume d'une tranche est à peu près égal à $\pi \cdot \left(f(\xi_k)\right)^2 \Delta x$ pour tout ξ_k de l'intervalle $[x_{k-1}; x_k]$. Il en résulte que le volume du solide est à peu près égal à
$$\sum_{k=1}^{n} \pi \cdot \left(f(\xi_k)\right)^2 \Delta x$$
- En faisant tendre n vers l'infini, on a, puisque la fonction πf^2 est continue sur l'intervalle $[a; b]$,
$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot \left(f(\xi_k)\right)^2 \Delta x = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Exemple : Calcul du volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x du domaine compris entre le graphique de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x$ et les droites $x = 0$ et $x = 2$.



$$V = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2\right) dx = \pi \left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^2 = \frac{2}{3}\pi \cong 2{,}09$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?


Aire latérale du corps

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad \text{si } f \ge 0$$

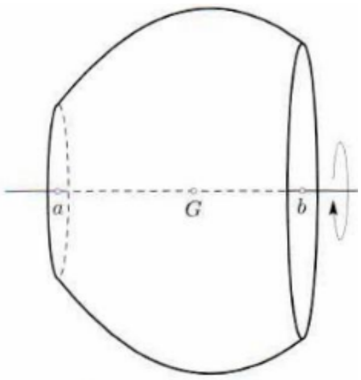
Volume du corps

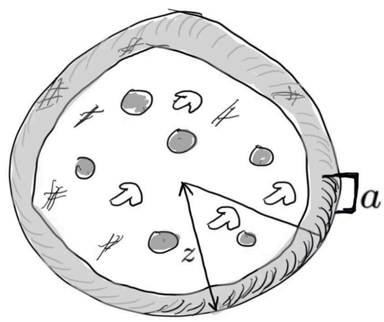
$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

Centre de gravité du corps

$$x_G = \frac{\pi}{\mathcal{V}} \int_a^b x(f(x))^2\, dx$$

$$y_G = z_G = 0$$





$V = \pi \cdot z^2 . a = pizza$

➢ ***Analyse Série 5 exercices 1 à 9***

3.5 Intégrales impropres

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a; b[$ mais non continue ou non définie en b.

L'intégrale $\int_a^t f(x)dx$ existe donc pour chaque nombre t de l'intervalle $[a; b[$ mais pas forcément lorsque $t = b$.

Cependant, si $\lim\limits_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ existe, on dit que l'intégrale converge et cette limite se note $\int_a^b f(x)dx$.

Nous parlons alors d'**intégrale impropre**.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b[$ mais non continue ou non définie en b.

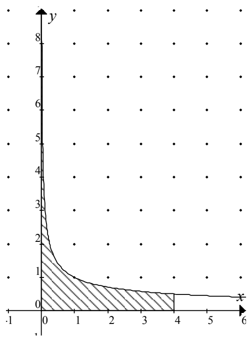
Si $\lim\limits_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$ existe et est finie, alors on définit $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx}$

Une définition analogue[6] existe pour les fonctions non continues ou non définies en a:

Définition :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a; b]$, mais non définie ou non continue en a.
Si $\lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$ existe et est finie, alors on définit $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx}$

Exemple :



Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui n'est pas définie en 0. (ni sur $\mathbb{R}_-$)

Est-ce que l'intégrale $\int_0^4 f(x)dx$ converge ?

$$\lim_{t \to 0^+} \int_t^4 f(x)dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^4 = \lim_{t \to 0^+} \left(4 - 2\sqrt{t}\right) = 4$$

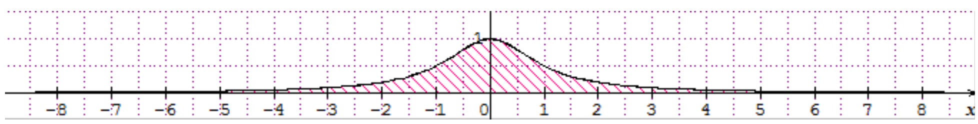
L'intégrale converge. La superficie du domaine hachuré mesure 4 bien que ce domaine soit illimité.

➢ ***Analyse Série 5 exercices 10 à 12 & Livre Analyse p.186 ex 5.18***

Remarque : il y a aussi une définition analogue pour $b = \infty$ ou lorsque $a = -\infty$

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{1}{(1+x^2)dx} + \lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{1}{(1+x^2)}dx =$$
$$\lim_{t \to -\infty} (\arctan(0) - \arctan(t)) + \lim_{u \to \infty} (\arctan(u) - \arctan(0)) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

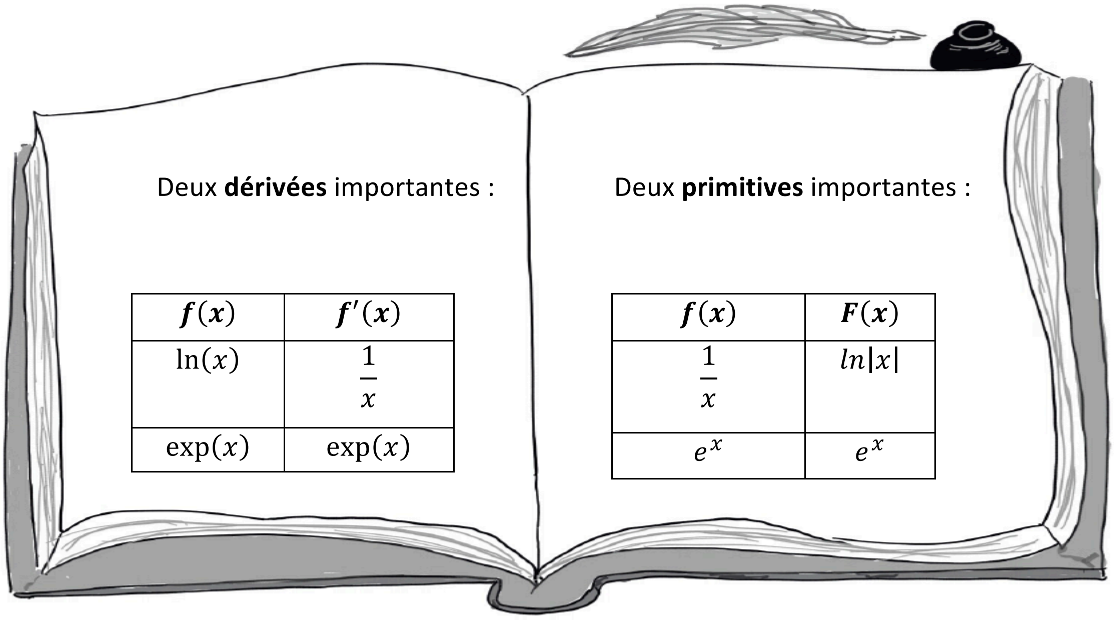
---

[6] Voir CRM n°25, *Analyse*, p.174-175

4. Fonction logarithme naturel et Fonction exponentielle

4.1 Préambule : formules utiles pour les exercices

Remarque : les formules présentées dans ce paragraphe seront démontrées dans la suite de ce chapitre.



Deux **dérivées** importantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$

Deux **primitives** importantes :

$F(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$
e^x	e^x

Exemples :

a) $(\ln(x^2))' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

b) $(e^{2x-1})' = 2e^{2x-1}$

c) $\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' =$

d) $\left(e^{x^2+x}\right)' =$

Exemples :

e) $\int_1^e \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^e = \frac{1}{2}(\ln(e) - \ln(1)) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

f) $\int_0^{1/2} e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e-1}{2}$

g) $\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx =$

h) $\int_2^3 e^{\frac{x}{2}}\,dx =$

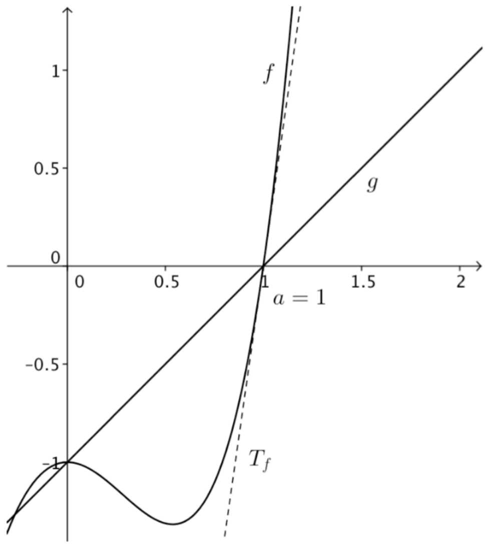
➢ ***Analyse Série 6 exercices 1 à 4 & Monographie n°25 de la CRM, p.220-221 ex 6.1 à 6.3 et 6.5 et 6.8***

4.2 Théorème de l'Hospital

Pour étudier les asymptotes verticales et horizontales des fonctions logarithme et exponentielle, nous aurons besoin du théorème de l'Hospital.

But : *Obtenir un critère permettant de calculer aisément des limites de quotients dans des cas indéterminés tels que « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».*

Exemple : Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+3x^3-3x^2-1}{x-1} =$



Méthode habituelle :

Soit les fonctions $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1$,

$g(x) = x - 1$ *et le point* $a = 1$.

Pour calculer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$, *la méthode classique consiste à constater que* $f(1) = g(1) = 0$ *et donc, par un théorème de 2e, de factoriser chacun des polynômes par* $x - 1$.

Il suffit alors de faire une division polynômiale et le tour est joué !

Or, une astuce consiste à faire intervenir la dérivée de f dans le calcul de la manière suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = 7$$

qui est bien défini car $g'(1) \neq 0$.

D'une manière générale on a le résultat :

Théorème de l'Hospital (« light ») :
Si

- f et g sont dérivables en a
- $f(a) = g(a) = 0$
- $g'(a) \neq 0$

alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

Preuve : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, puisque $g'(a) \neq 0$

Exemples :

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+5x+6}{x^2-x-6} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+5}{2x-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{1-\sqrt{x+1}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1} = 2$

Exercice :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5-1}{x^7-1} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(\sin(x))}{\sin(x)} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cos^2(x)-1}{x^2+sin^2(x)} =$

➢ **Analyse Série 6 exercice 5 & *Monographie n°25 de la CRM, p.222-223 ex 6.14***

4.3 Définition et propriétés du logarithme naturel

En 2e année, nous avons étudié les fonctions exponentielles et logarithme.

Nous avions défini la fonction $\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto a^x \end{cases}$ qui est bijective si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Nous avions ensuite défini la fonction logarithme $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ comme la réciproque de $\exp_a$

Dans ce paragraphe, nous allons procéder de manière inverse en définissant une fonction logarithme (la fonction logarithme naturel) à l'aide d'une intégrale. Cette fonction sera bijective. Elle permettra de définir de manière rigoureuse l'exponentielle comme réciproque et de démontrer des résultats.

Soit $f : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x^n}$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet donc des primitives.

Si $\boxed{n \neq -1}$: on sait que les primitives de f sont de la forme $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Si $\boxed{n = -1}$: que se passe-t-il ?

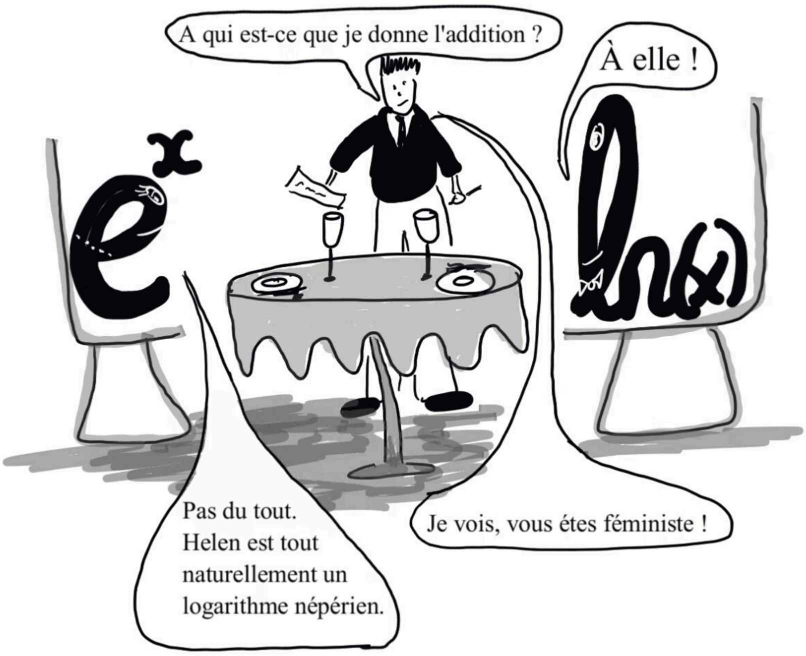
La primitive $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$ n'est pas valable car la division par zéro est interdite.

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \neq \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + c = \frac{x^0}{0} + c$$

Nous savons que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et que toute fonction continue sur un intervalle fermé est intégrable. Donc il existe un intervalle (attention, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle!) sur lequel f est intégrable. Et comme l'intégrale définit une primitive de f (d'après le théorème fondamental du calcul intégral), on sait que la fonction $x \mapsto \int_a^x \frac{1}{t}\,dt\ \ de\ \mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, est la primitive de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = a$.

Parmi ces primitives, celle qui associe 1 à 0 ($1 \mapsto 0$) fait l'objet de la définition suivante :

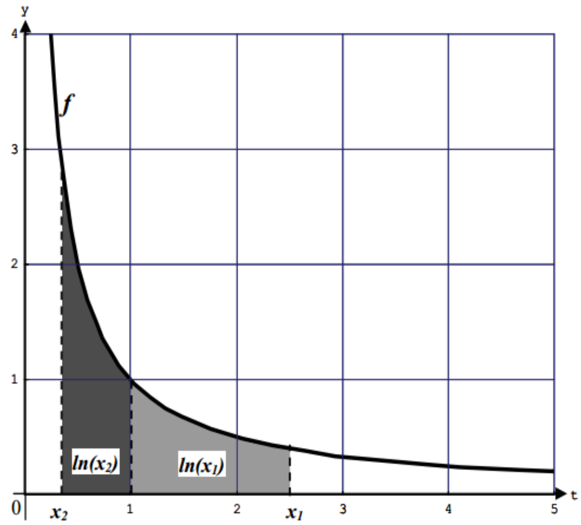
Définition : On appelle ***fonction logarithme naturel*** la fonction (notée ln):
$ln : x \mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\ de\ \mathbb{R}_+^*\ vers\ \mathbb{R}$



4.4 Propriétés de la fonction ln

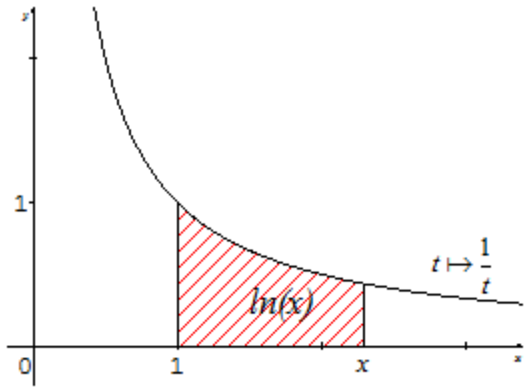
Interprétation géométrique :

Nous pouvons "visualiser" cette fonction ln, puisque si $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\ln(x)$ est l'aire du domaine délimité par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'axe horizontal et les verticales passant par $(1;0)$ et $(x;0)$:

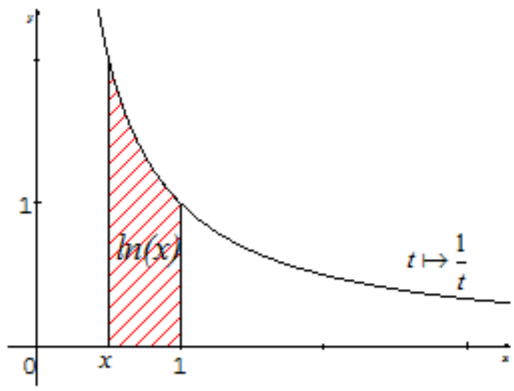


Remarques :

- Si $0 < x < 1$ alors
  $\ln(x) = \int_1^t \frac{1}{t}\,dt = -\underbrace{\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt}_{>0} < 0$
- Si $x > 1$ alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt > 0$



$x > 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) > 0$



$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) < 0$

A partir de la définition, nous obtenons les propriétés suivantes pour la fonction ln:

Propriété 1 : $D_f = \mathbb{R}_+^*$

Le domaine de définition exclut donc zéro et toutes les valeurs de $x < 0$. De ce fait, il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

Propriété 2 : $\ln(1) = 0$

Par définition de l'intégrale : $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$.

La fonction ln admet un zéro en $x = 1$

Propriété 3 : $(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

D'après le théorème fondamental, $\ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x} \;\; \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété 4 : ln est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui implique que $\ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Comme $\ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x)$ est négative si $0 < x < 1$ et positive si $x > 1$. On peut donc construire le tableau de signes suivant :

x		0		1	
$\ln(x)$	/	/	-	0	+

Propriété 5 : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \; \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve : Si $y \in \mathbb{R}_+^*$ (une constante), les fonctions $F: x \longmapsto \ln(x)$ et $G: x \mapsto \ln(xy)$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ ont la même fonction dérivée, car:

$$F(x) = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \quad et \quad G(x) = \ln(xy) = F(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt$$

Donc

$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad et \; G'(x) = \frac{1}{x}$$

Comme Fet G sont primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors F et G ne diffèrent que par une constante :

$$G(x) = F(x) + c \,, c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln(xy) = \ln(x) + c \,, c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante c, on pose $x = 1$ dans la dernière égalité. On obtient :

$$\ln(1y) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + c \Leftrightarrow \ln(y) = c$$

Conclusion : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Propriété 6 : $\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}_+^* \; et \; \forall p \in \mathbb{R}$

Preuve : $(\ln(x^p))' = \frac{1}{x^p}(x^p)' = \frac{1}{x^p} \cdot p \cdot x^{p-1} = p \cdot \frac{1}{x} = (p \cdot \ln(x))'$

prop 3 + $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ algèbre prop 3

Comme $(\ln(x^p))' = (p \cdot \ln(x))'$, cela signifie que $\ln(x^p)$ et $p \cdot \ln(x)$ ne diffèrent que d'une constante :

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante, posons $x = 1$. On obtient :

$$\ln(1^p) = p \cdot ln(1) + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = p \cdot 0 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

Donc :

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) + 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^p) = p \cdot \ln(x)$$

Propriété 7 : $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

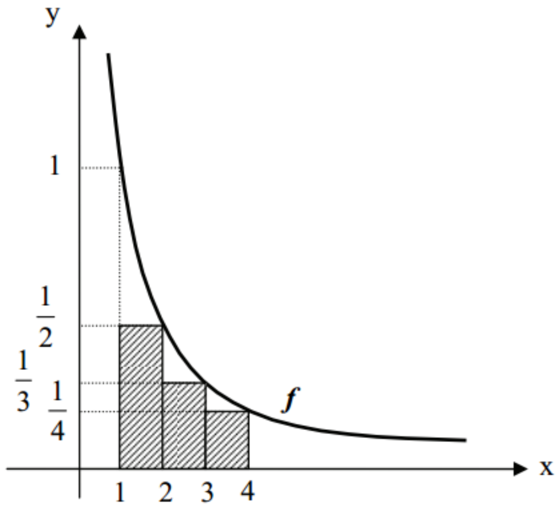
Preuve : Posons $\frac{y}{y} = y \cdot \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow \ln\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln(1) \underset{\text{prop 2}}{=} 0 \underset{\text{prop 5}}{\Leftrightarrow} \ln(y) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$

Propriété 8 : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve : Posons $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \underset{\text{prop 5}}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \underset{\text{prop 7}}{=} \ln(x) - \ln(y)$

Propriété 9 : $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

Preuve : Nous allons raisonner à l'aide d'un dessin:



Nous savons que $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ représente l'aire définie entre 1 et x par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ et cette aire est supérieure à celle définie par les rectangles dessinés sous la courbe, dont la base vaut toujours 1 et la hauteur $\frac{1}{n}$.

Par exemple :

$$\int_1^4 \frac{1}{t}\, dt > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \; donc \; \int_1^x \frac{1}{t}\, dt > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt > \lim_{x \to \infty} \sum_{i=2}^{x} \frac{1}{i} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{x}\right)$$

Pour calculer cette dernière somme, nous allons faire la comparaison entre cette somme et une autre somme qui est plus petite, car on y a remplacé certaines fractions par d'autres plus petites

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots >$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4\,fois}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{8\,fois}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}}_{16\,fois}\right) + \cdots$$

Et dans chacune des parenthèses on remarque que l'on obtient chaque fois $\frac{1}{2}$, et l'on pourra obtenir autant de fois $\frac{1}{2}$ que l'on veut, car notre somme contient une infinité de termes. Donc notre somme est plus grande que celle qui correspond à une infinité de $\frac{1}{2}$ et qui tend donc vers l'infini.

Remarque : la fonction ln ne possède donc pas d'asymptote horizontale.

Propriété 10 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Preuve : Posons $x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} (-\ln(y)) = -\lim_{y\to\infty} \ln(y) = -\infty$$

$x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to \infty$ prop 7   prop des limites   prop 9

Remarque : la fonction ln possède une asymptote verticale en $x = 0$

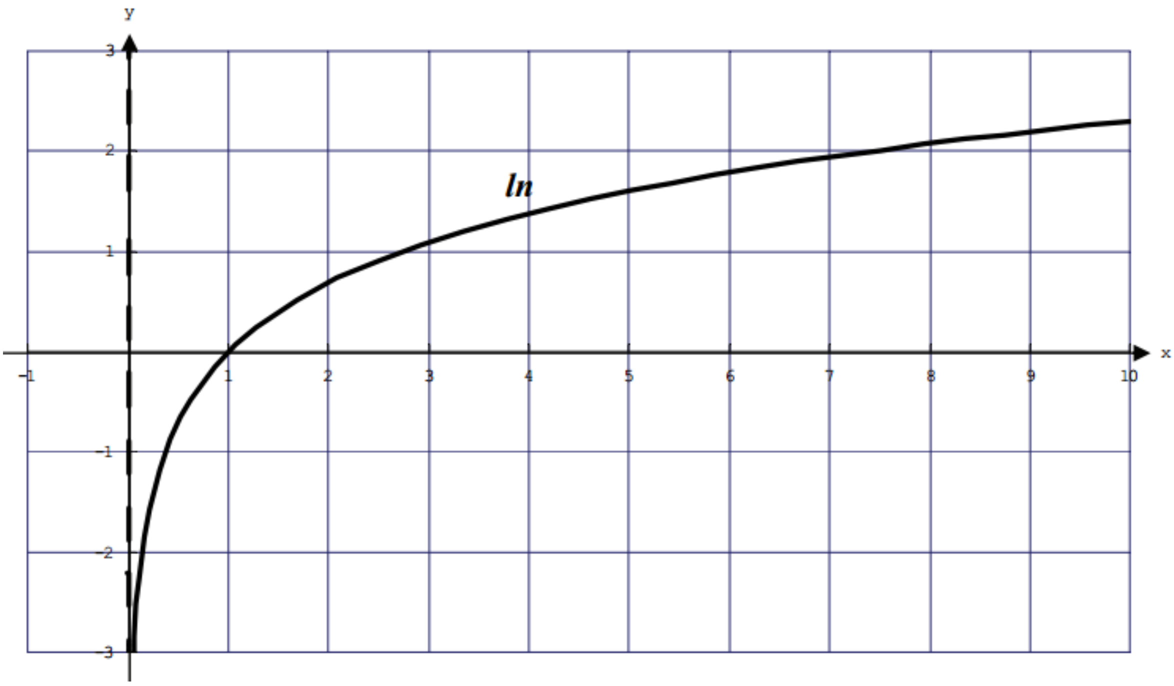
Propriété 11 : $\ln(e) = 1$

Des propriétés 4),9) et 10), on peut déduire que ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que chaque $y \in \mathbb{R}$ possède une unique préimage, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En particulier, il existe un unique nombre réel, noté e, tel que $\ln(e) = 1$.
e est la préimage de 1 par ln, c'est-à-dire: $\ln(e) = 1$ ou $\int_1^e \frac{1}{t}\ dt = 1$
e est un nombre irrationnel et $e \approx 2{,}71828\ldots$, c'est le ***nombre d'Euler***

Représentation graphique de la fonction ln :

A part $\ln(1)$, nous ne pouvons pour le moment calculer aucune image ! Mais, en connaissant les 2 limites, en sachant que la fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant le fait que la pente de la tangente est donnée par $\frac{1}{x}$ (donc la courbe "s'aplatit rapidement"), nous pouvons esquisser la représentation graphique de la fonction ln:



4.5 Fonction exponentielle : définition et propriétés

4.5.1 Définition

Nous voulons considérer la réciproque[7] de la fonction ln. Pour cela, il faut tout d'abord montrer que cette réciproque existe, donc que ln est une fonction bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

- Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \infty} \ln(x) = \infty$. Comme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, chaque élément de $\mathbb{R}$ a au moins une préimage par ln dans $\mathbb{R}_+^*$ (surjectivité)

- Chaque préimage est unique (injectivité). Dans le cas contraire, il existerait deux nombres x_1 et x_2 distincts ayant la même image ; on aurait, par exemple, $x_1 < x_2$ et $\ln(x_1) = \ln(x_2)$. Mais ceci n'est pas possible, car nous savons que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, par conséquent : $x_1 < x_2 \Longrightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2)$

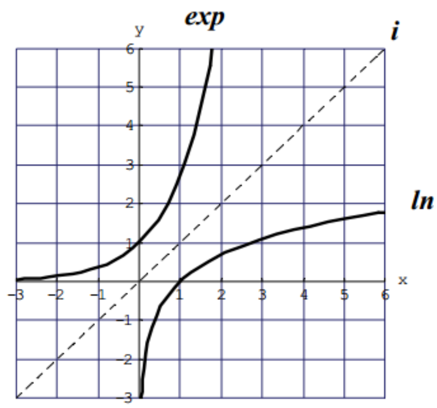
En conclusion : La fonction ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc définir une fonction réciproque de ln, que nous noterons $\boldsymbol{exp}$:

Définition :

La fonction **exp** est la réciproque de la fonction ln
Autrement dit : $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y)\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \forall y \in \mathbb{R}$
On peut aussi écrire : $\ln(\exp(y)) = y\ et\ exp(\ln(x)) = x\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \forall y \in \mathbb{R}$

Représentation graphique :

A partir de cette définition, nous pouvons donner une représentation graphique de la fonction exp :

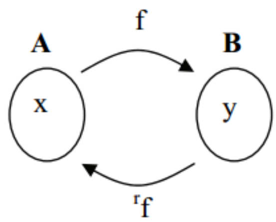


Remarque : La fonction exp est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la réciproque de la fonction bijective ln de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

---

[7] **Rappels :**

- Soit $f: A \to B$ une fonction
  f est bijective $\Leftrightarrow\ \ \forall y \in B\ \exists\ un\ unique\ x \in A\ tel\ que\ y = f(x)$



- Soit $f: A \to B$ une fonction bijective
  ${}^{r}f: B \to A$ est telle que ${}^{r}f(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y\ \forall x \in A\ et\ \forall y \in B$
  ${}^{r}f$ est appelée la fonction réciproque de la fonction f

- f admet une fonction réciproque de B vers $A \Leftrightarrow f$ est une fonction bijective de A vers B.
  La fonction réciproque d'une bijection est aussi bijective.

- Dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction f et de sa réciproque ${}^{r}f$ présentent une symétrie par rapport à la droite $i(x) = x$

4.6 Propriétés de la fonction *exp*

A partir de cette définition, nous pouvons obtenir les propriétés suivantes de la fonction exp :

Propriété 1 : $D_f = \mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

Car exp est la réciproque de la fonction ln qui est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

La fonction exp n'admet pas de zéro.

Propriété 2 : $\exp(0) = 1$ (ordonnée à l'origine)

On a $\exp(\ln(x)) = x$ donc en posant $x = 1$ on a: $\exp\left(\underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) = 1$

Propriété 3 : $\exp(1) = e$

On a $\exp(\ln(x)) = x$ donc en posant $x = e$ on a: $\exp\left(\underbrace{\ln(e)}_{=1}\right) = e$

Propriété 4 : La fonction exp est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))' = \exp(x)$

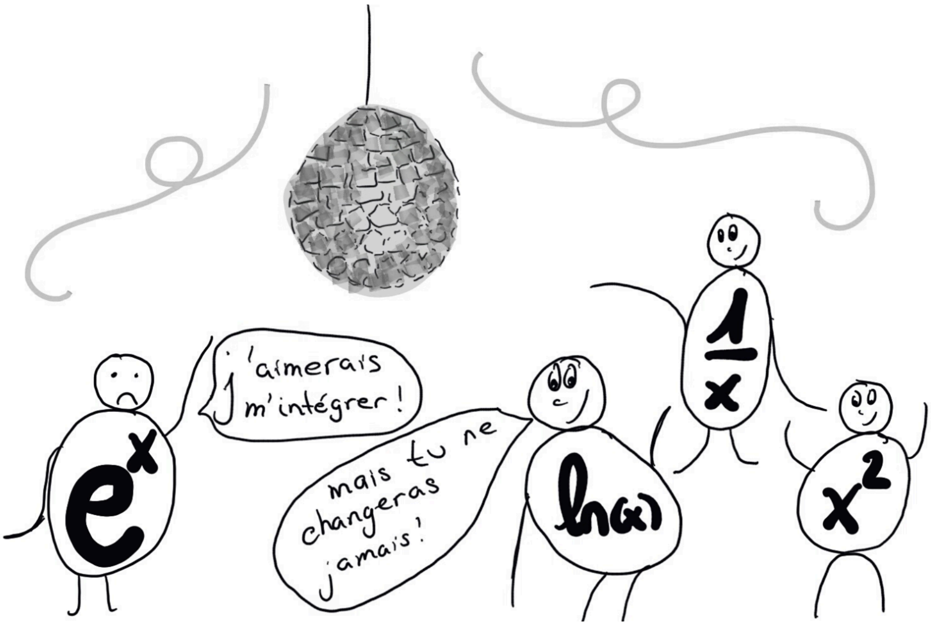
On a : $\ln(\exp(x)) = x$

Dérivons l'égalité (puisque deux fonctions égales ont la même dérivée):

$$(\ln(\exp(x)))' = (x)' \Leftrightarrow \frac{1}{\exp(x)}(\exp(x))' = 1 \Leftrightarrow (\exp(x))' = \exp(x)$$

Dérivée d'une fonction composée

Remarque : Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))' = \exp(x)$, la fonction exp est primitive d'elle-même sur $\mathbb{R}$.



Propriété 5 : La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

exp est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$
Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $(\exp(x))' = \exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Remarque: Comme exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, exp est $\begin{cases} < 1, si\ x < 0 \\ > 1, si\ x > 0 \end{cases}$

Propriété 6 : $\exp(x_1)\exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)\ , \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Preuve :

$\ln(\exp(x_1)\exp(x_2))$

$$\underbrace{=}_{prop\ ln} \ln\left(\exp(x_1)\right) + \ln(exp(x_2))$$

$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} x_1 + x_2$$

$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} \ln(exp(x_1 + x_2))$$

Donc :

$$\ln(exp(x_1)\, exp(x_2)) = \ln(exp(x_1 + x_2))$$

Comme ln bijective donc $\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$

$$\Leftrightarrow \exp(x_1)\exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$$

Propriété 7 : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}$

Preuve :

$\ln\left(\frac{1}{exp(x)}\right)$

$$\underbrace{=}_{prop\ ln} -\ln(\exp(x))$$

$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} -x$$

$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} \ln(exp(-x))$$

Donc : $\ln\left(\frac{1}{exp(x)}\right) = \ln(exp(-x))$

Comme ln bijective ($\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

Propriété 8 : $\frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} = \exp(x_1 - x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Preuve : $\frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} = \exp(x_1) \cdot \frac{1}{\exp(x_2)}$

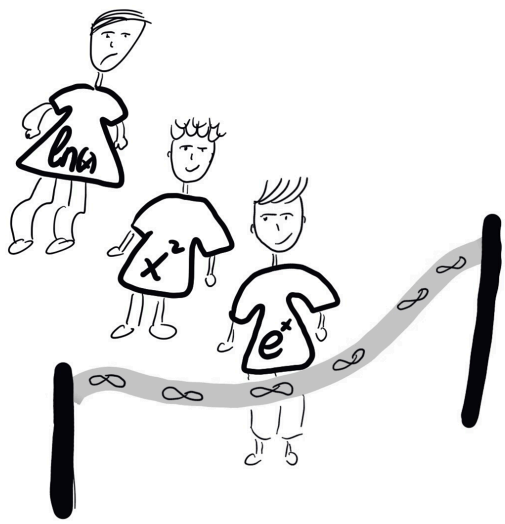
$$\underbrace{=}_{prop\ 7} \exp(x_1) \cdot \exp(-x_2)$$

$$\underbrace{=}_{prop\ 6} \exp\big(x_1 + (-x_2)\big)$$

$$= \exp(x_1 - x_2)$$

Propriété 9 : $(\exp(x))^n = \exp(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}$

Preuve : $\ln\left([\exp(x)]^n\right) \underbrace{=}_{prop\ ln} n \cdot \ln(exp(x)) \underbrace{=}_{déf\ réciproque} nx \underbrace{=}_{déf\ réciproque} \ln(exp(nx))$



Donc

$$\ln([\exp(x)]^n) = \ln(exp(nx))$$

Comme ln bijective ($\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$) :

$$\Leftrightarrow [\exp(x)]^n = \exp(nx)$$

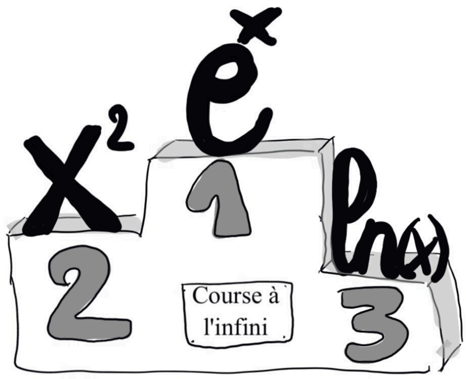
Propriété 10 : $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$

car $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

Propriété 11 : $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

car $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Propriété 12 : $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$



On a vu que $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\exp(n) = \exp(n \cdot 1) = [\exp(1)]^n = e^n$

Soit $n \in \mathbb{Z}_-^*$, on a : $\exp(n) \underbrace{=}_{x=-p} \exp(-p) = \frac{1}{\exp(p)} = \frac{1^p}{e} = e^{-p} = e^n$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on admettra sans démonstration que: $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

➢ ***Analyse Série 6 exercices 6 à 9 & Analyse Série 7 & Monographie n°25 de CRM p.223 ex 6.16 et 6.17***

Table des matières