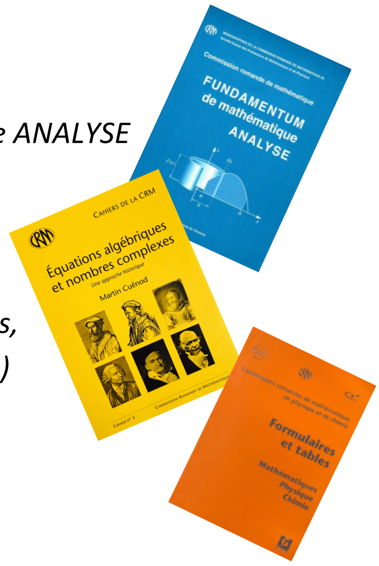
Analyse

Ce chapitre mêlera tout ce qui a été étudié jusqu'à présent : études de fonctions, calculs de limites, astuces algébriques, règles des puissances et retour aux exponentielles et logarithmes.

Matériel :



- Monographique CRM n°25 : *FUNDAMENTUM de mathématique ANALYSE* pour la théorie et les exercices **en cours.** *(Au premier semestre)*

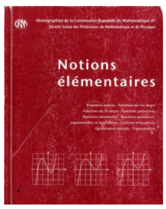
- Cahiers de la CRM, *Equations algébriques et nombres complexes, pour la théorie, le cours et les exercices. (Au deuxième semestre)*

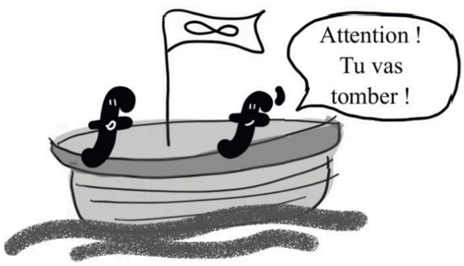
- *Formulaires et tables CRM,* pour **les épreuves** (et cours)

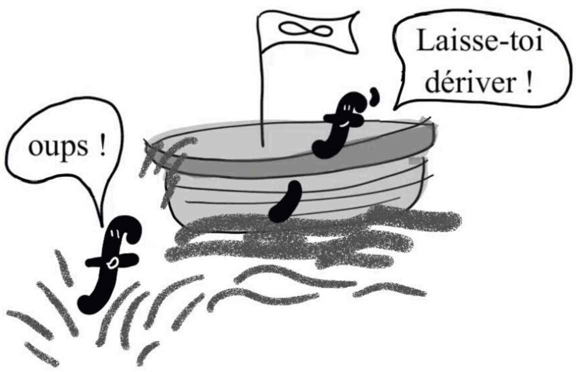
- Ce polycopié d'analyse et un autre sur les nombres complexes
- Des séries d'analyse distribuées en cours
- Le polycopié d'analyse et les séries d'exercices de 3e
- Une calculatrice non programmable (non « PRO »)

- Monographie CRM n°27: *Notions élémentaires*

  (pour les notions acquises en 1ere et 2eme)



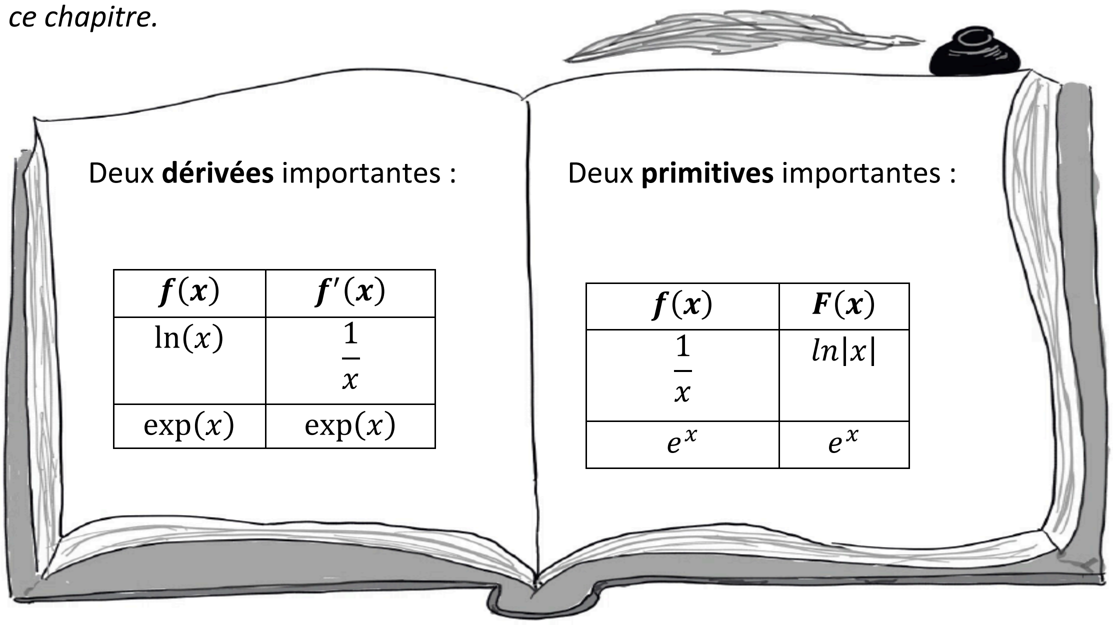




1. Formules utiles pour les exercices

1.1 Dérivées et primitives

Remarque : les formules présentées dans ce paragraphe seront démontrées dans la suite de ce chapitre.



Deux **dérivées** importantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$

Deux **primitives** importantes :

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$
e^x	e^x

Exemples :

a) $(\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

b) $(e^{2x-1})' = e^{2x-1} \cdot (2x-1)' = 2e^{2x-1}$

c) $\left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' =$

d) $\left(e^{x^2+x}\right)' =$

Exemples :

a) $\int_1^e \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]_1^e = \frac{1}{2}(\ln(e) - \ln(1)) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{1/2} e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e-1}{2}$

c) $\int_0^1 \frac{2}{x+1} dx =$

d) $\int_2^3 e^{\frac{x}{2}}\, dx =$

- ***Analyse Série 1 exercices 1 à 4 & Monographie n°25 de la CRM, p.220-221 ex 6.1 à 6.3 et 6.5 et 6.8***

1.2 Théorème de l'Hospital

Pour étudier les asymptotes verticales et horizontales des fonctions logarithme et exponentielle, nous aurons besoin du théorème de l'Hospital.

But : *Obtenir un critère permettant de calculer aisément des limites de quotients dans des cas indéterminés tels que « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».*

Exemple : *Calculer* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+3x^3-3x^2-1}{x-1} =$

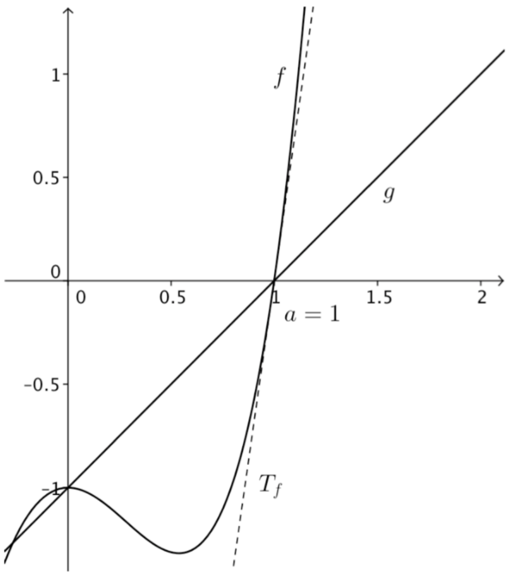
Méthode habituelle : *Soit les fonctions* $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1$*,*

$g(x) = x - 1$ *et le point* $a = 1$*.*

Pour calculer $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$*, la méthode classique consiste à constater que* $f(1) = g(1) = 0$ *et*

donc, par un théorème de 2^e^, de factoriser chacun des polynômes par $x - 1$*.*

Il suffit alors de faire une division polynômiale et le tour est joué !



Or, une astuce consiste à faire intervenir la dérivée de f *dans le calcul de la manière suivante :*

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = 7$$

qui est bien défini car $g'(1) \neq 0$*.*

D'une manière générale on a le résultat :

Théorème de l'Hospital (« light ») :
<u>Si</u>

- f et g sont dérivables en a
- $f(a) = g(a) = 0$
- $g'(a) \neq 0$

<u>alors</u> $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

Preuve : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, puisque $g'(a) \neq 0$

Exemples :

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+5x+6}{x^2-x-6} \overset{\frac{0}{0}}{\hat{=}} \lim\limits_{x \to -2} \frac{2x+5}{2x-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{1-\sqrt{x+1}} \overset{\frac{0}{0}}{\hat{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1} = 2$

Exercice :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5-1}{x^7-1} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(\sin(x))}{\sin(x)} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cos^2(x)-1}{x^2+sin^2(x)} =$

En revanche, le théorème ne permet pas de déterminer la dérivée en $a = 0$ de la fonction $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, si\ x \neq 0 \\ 1, si\ x = 0 \end{cases}$.

Pour ce faire, il est nécessaire de disposer d'un théorème moins contraignant, énoncé ci-dessous :

Théorème de l'Hospital (standard)

Si

1) f et g sont dérivables sur $]a; b]$
2) f et g sont continues sur $[a; b]$
3) $f(a) = g(a) = 0,$
4) $g'(x) \neq 0$ sur $]a; b]$
5) $\lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$

Preuve : Posons $h(x) \coloneqq f(x)g(b) - g(x)f(b)$

On a :

- h continue sur $[a; b]$
- h dérivable sur $]a; b[$
- $h(a) = h(b) = 0$
  car : $h(a) = \underbrace{f(a)}_{=0} g(b) - \underbrace{g(a)}_{=0} f(b) = 0$
  et : $h(b) = f(b)g(b) - g(b)f(b) = 0$

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$h'(x) = \big(f(x)g(b) - g(x)f(b)\big)' = f'(x)g(b) - g'(x)f(b)$$

donc $h'(c) = \underbrace{f'(c)g(b) - g'(c)f(b) = 0}$

$$\Leftrightarrow f'(c)g(b) = g'(c)f(b) \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

Si $b \to a_+$, alors $c \to a_+$ et $\lim_{x \to a_+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to a_+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda$. *CQFD*

Remarque :

Le théorème reste valable si on remplace a_+ par b_-, ou si $\lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{x \to a_+} g(x) = \pm\infty$

Exemples :

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} \overset{\frac{1}{\infty}}{\underset{H}{=}} 0$

Attention : Que la dérivée de g ne s'annule pas sur un certain ouvert $]a; b[$ est essentiel.

Reprenons l'exemple de la fonction $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, si\ x \neq 0 \\ 1, si\ x = 0 \end{cases}$:

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

Chacune des fonctions au numérateur et au dénominateur s'annule en $a = 0$ et sont $\mathcal{C}^\infty$ (la fonction f est n fois continument dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
Si l'on applique le théorème de l'Hospital (standard), on obtient :

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = (*)$$

et donc un doute subsiste encore sur l'existence de la limite.
Cependant, l'on peut à nouveau appliquer le théorème de l'Hospital (« light ») sur le nouveau quotient pour voir apparaitre :

$$(*) = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$$

et donc toutes les limites qui précèdent existent aussi (récursivement) !

- ***Livre d'Analyse p.129 ex 4.1- 4.3***

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Théorème de L'Hospital

On note a un nombre réel, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a et telles que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou si $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, alors $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

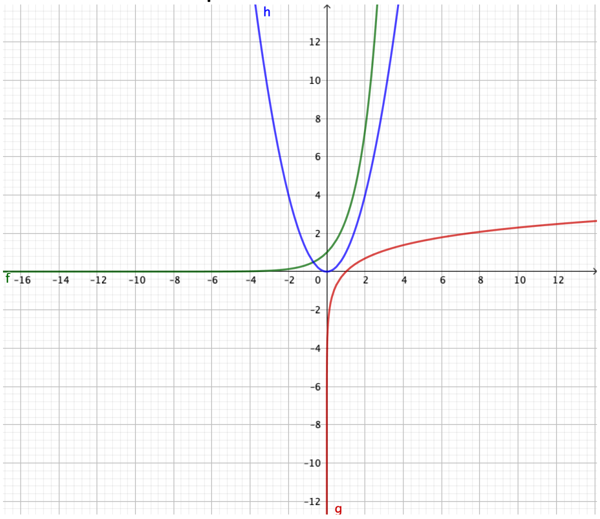
Cette règle s'applique également aux calculs de limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

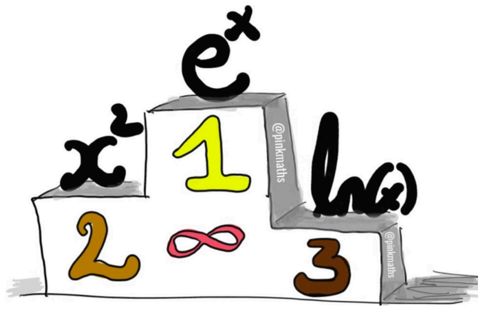
- **Analyse Série 1 exercice 5 & *Monographie n°25 de la CRM, p.222-223 ex 6.14***

➢

1.3 La course à l'infini : la règle du podium

Les fonctions $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = x^2$ font la course jusqu'à l'infini. Qui gagnera à tous les coups ?





Cette question est importante à maitriser pour les études de fonctions. La course à l'infini représente la recherche d'une asymptote horizontale. Les fonctions à étudier sont souvent des multiplications de fonctions polynômiales avec des fonctions exponentielles ou logarithmes.

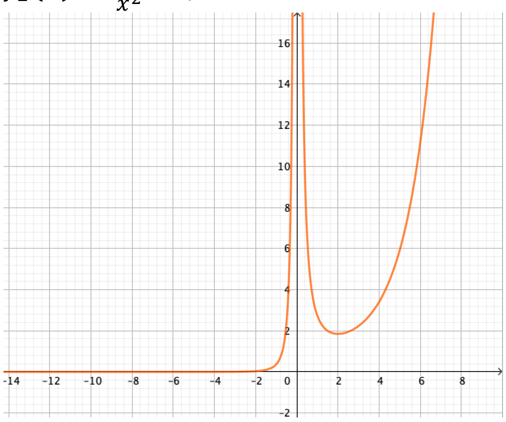
Exemples : $f_1(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ou $f_2(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Ces deux fonctions amènent une indétermination de type ∞/∞ lors du calcul de limite avec x qui tend vers l'infini.

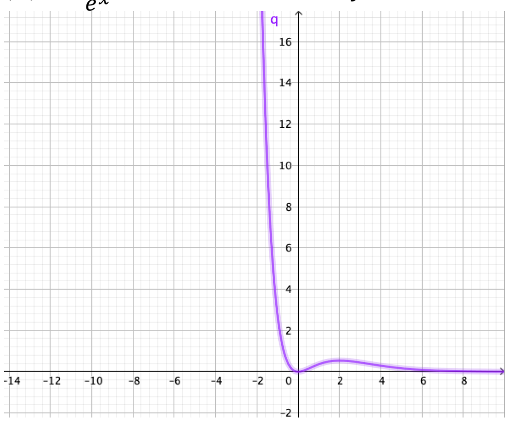
Le théorème de l'Hospital nous permettra de faire « disparaitre » le polynôme et c'est donc l'exponentielle qui gagnera la course face à n'importe quel polynôme. C'est la règle du podium.

On a donc :

$f_1(x) = \frac{e^x}{x^2}$ pas d'A.H vers $+\infty$



et $f_2(x) = \frac{x^2}{e^x}$ avec une A.H. en $y = 0$ vers $+\infty$



1.4 Les autres bases

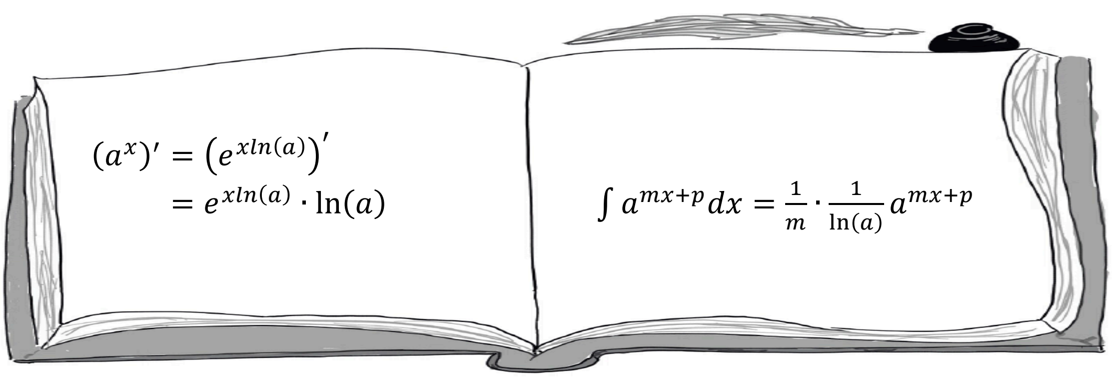
L'exponentielle de base e est la plus courante. Mais que se passe-t-il pour les autres bases ?

Il faut se rappeler d'une formule :

$$a^x = e^{xln(a)}$$

Avec cette formule et les règles de dérivations, il est possible de retrouver la règle.

On obtient donc les pages suivantes du grimoire :



2. Rappels de deuxième année :

2.1 Propriétés de puissances et fonction exponentielle :

En *deuxième année*, nous avons étudié les fonctions exponentielles et logarithme.
Nous avions défini la fonction $\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{cases}$ qui est bijective si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Nous avions ensuite défini la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ comme la réciproque de $\exp_a$.

En algèbre, il a été possible de donner une définition de a^x, pour autant que a soit un nombre réel positif et x un nombre rationnel.

Rappelons la démarche qui a conduit à cette définition en considérant la fonction

$$\boxed{f : x \mapsto 10^x}$$

Dans un premier temps, 10^x est défini pour les nombres entiers positifs :

$$10^x = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{x\ fois}$$

C'est une notation très utile, en particulier pour multiplier les grands nombres puisqu'on a la propriété :

$$\boxed{10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}}$$

L'extension de la définition de 10^x à des nombres x rationnels se justifie par le maintien de cette propriété.

L'équation : $10^0 \cdot 10^n = 10^{0+n} = 10^n$ nous force à poser que $\boxed{10^0 = 1}$.

L'équation suivante : $10^{-n} \cdot 10^n = 10^0 = 1$ nous oblige à poser : $\boxed{10^{-n} = 1/10^n}$

Puisqu'on souhaite que l'équation : $10^{\frac{1}{n}} \cdot 10^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = 10^1 = 10$
soit vraie, il faut définir : $\boxed{10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}}$
Et puisque l'on souhaite que l'équation : $\underbrace{10^{\frac{1}{n}} \cdot 10^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot 10^{\frac{1}{n}}}_{m\ fois} = 10^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = 10^{\frac{m}{n}}$ soit vraie,

il faut définir : $\boxed{10^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{10}\right)^m}$

Malheureusement, l'algèbre ne nous permet pas d'aller plus loin et de définir 10^x pour x rationnel. L'analyse nous donnera toutefois le moyen de franchir ce pas, comme nous le verrons plus loin.
Pour le moment, contentons-nous de rappeler les propriétés et l'allure de l'exponentielle, puis du logarithme. On supposera simplement qu'il est possible de définir 10^x ou a^x $(a > 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (puissances) : Si $m, n \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n, 1^n = 1\,,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \qquad a^0 = 1$$

Définition (exponentielle) :
Une ***fonction exponentielle*** est une fonction de la forme :

$$f: x \mapsto a^x$$

où a est un réel strictement positif et $a \neq 1$.
Le domaine de f est $\mathbb{R}$.

Propriétés (de la fonction exponentielle) :

1. $a \neq 1$ et $a > 0$

2. L'image de $\mathbb{R}$ par f $\mathbb{R}_+^*$; c'est une fonction strictement croissante ou décroissante selon la valeur de a.

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est donc bijective.

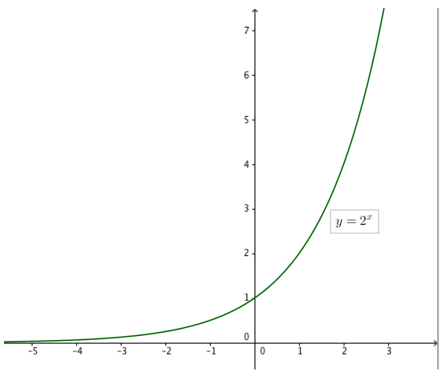
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$; pour $a > 1$, Lorsque $x \to -\infty$, l'axe des x est une asymptote horizontale et lorsque $x \to \infty$, la fonction croît très rapidement (de manière exponentielle, justement)

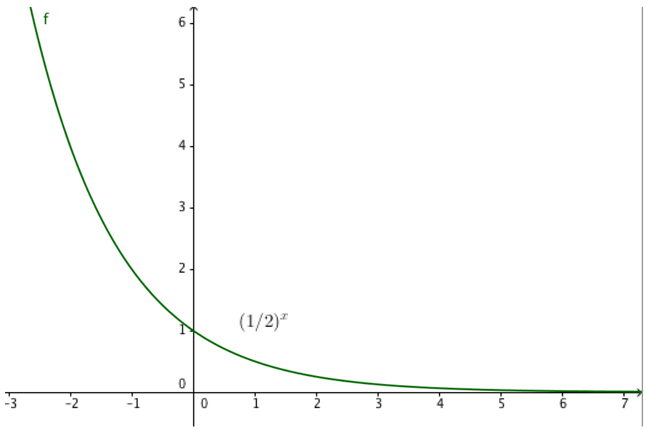
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$; pour $0 < a < 1$, lorsque $x \to \infty$, l'axe des x est une asymptote horizontale et lorsque $x \to -\infty$, la fonction croît très rapidement (de manière exponentielle, justement).

Remarques par rapport à la propriété 1 :

Si $a = 1$, alors on a $f(x) = 1^x = 1$, donc une fonction constante.
Si $a < 0$, alors la fonction n'est pas définie avec $x = \frac{1}{2}$,
exemple : $(-3)^{1/2} = \sqrt{-3}$

Illustration :





Beaucoup de situations apparaissant dans le monde naturel peuvent être symbolisées par une fonction exponentielle dont la base est un nombre irrationnel très particulier symbolisé par la lettre e: $f: x \mapsto e^x$. Ce nombre e a une valeur approximative de 2,71828 …

2.2 La fonction logarithme :

Une fonction bijective $f: x \mapsto y$ a une réciproque ${}^{r}f: x \mapsto y$ qui est définie (implicitement) par l'équation $x = f(y)$. En particulier, l'exponentielle $y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, est bijective et a donc une réciproque définie implicitement par l'équation

$$x = a^y, a > 0, <\neq 1$$

Cette réciproque est suffisamment importante pour mériter un nom, c'est la fonction logarithme.

Définition (fonction logarithme) :

La ***fonction logarithme de base*** $\boldsymbol{a}$, avec $a > 0, a \neq 1$est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ désignée par

$$\log_a : x \mapsto y$$

et est définie par

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

Si la base du logarithme est e, il s'agit du ***logarithme népérien*** noté $\mathbf{ln(x)}$
Si la base du logarithme est 10, la fonction logarithme est simplement notée $\mathbf{log(x)}$**.**

Exemples :

1. Si $y = \log_3(x)$ alors $x = 3^y$.

   Ainsi $\log_3(9) = 2$ car $9 = 3^2$.

2. $\log(1000) = 3$, car $1000 = 10^3$.

Exemple de transformation d'expressions exponentielles en expressions logarithmiques.

a) $2{,}5^3 = m$ on a donc $3 = \log_{2,5}(m)$

b) $e^b = 9$ on a donc $b = \ln(9)$

Exercice de recherche de la valeur exacte de certains logarithmes :

a) $\log_2(8) =$

b) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$

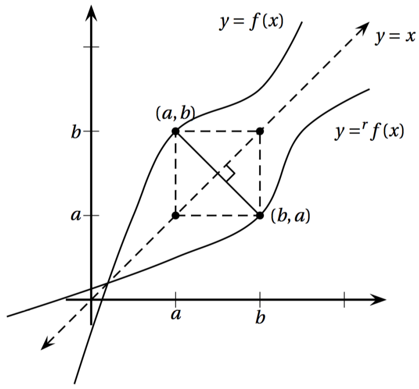
c) $\log_5(25) =$

Rappel sur la représentation d'une fonction et de sa réciproque[1] :

Soit un point (a, b) appartenant à la représentation graphique d'une fonction bijective f donnée. On a alors $b = f(a)$. On a aussi immédiatement $a = {}^r f$.

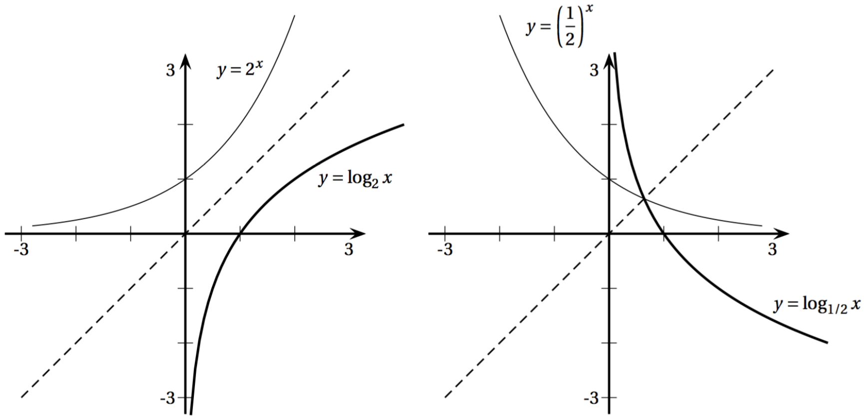
Ainsi $(b; a)$ est un point du graphe de la fonction réciproque ${}^r f$. On note aussi que la ligne joignant les points $(a; b)$ et $(b; a)$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$ et que celle-ci la coupe en son milieu. La droite $y = x$ est donc un axe de symétrie pour les courbes représentant les fonctions f et ${}^r f$.
Concernant les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction et de sa réciproque, on a aussi les identités :

$$Image(f) = Domaine\ {}^r f$$
$$Domaine\ f = Image\ ({}^r f)$$



Représentation graphique du logarithme[2] :

Comme le logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle, il suffit de connaître le graphe de celle-ci pour en déduire celui du logarithme.



Remarques :

a. Pour tout $a > 0$, l'intersection avec l'axe des x est en 1, c'est-à-dire que $\log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$.
b. L'axe Oy est une asymptote verticale du graphe.
c. Le logarithme est une fonction strictement croissante si $a > 0$, et strictement décroissante si $0 < a < 1$.
d. Le graphe est lisse et continu, sans point anguleux ni saut.

Propriétés des logarithmes :

Propriétés des logarithmes :
Soient a, t, s des nombres positifs, $a \neq 1$ et x un réel quelconque.
1. $\mathbf{\log_a(1) = 0}$ ***et*** $\mathbf{\log_a(a) = 1}$
2. $\mathbf{a^{\log_a(t)} = t}$ **et** $\mathbf{\log_a(a^r) = r}$

Preuve de 2. : Soit $x = \log_a(t)$. On a par définition du logarithme l'expression correspondante de l'exponentielle $a^x = t$ mais $x = \log_a(t)$ donc $a^{\log_a(t)} = t$.

[1] Tiré du cours de Jan Weiss du Collège Calvin.
[2] http://icp.ge.ch/po/calvin/espace-pedagogique/math/cours-de-j.-weiss/documents-pour-le-cours-de-3e-et-4e-maths-niveau-2

Exemples :

a) $2^{\log_2(8)} =$ b) $2^{\log_2(\pi)} =$

c) $e^{\ln(5)} =$ d) $\ln(e^x) =$

3. $\boldsymbol{\log_a(t \cdot s) = \log_a(t) + \log_a(s)}$ *le log d'un produit est égal à la somme des logs*

4. $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{t}{s}\right) = \log_s(t) - \log_a(s)}$ le log d'un quotient est égal à la différence des logs.

5. $\boldsymbol{\log_a\left(\frac{1}{t}\right) = -\log(t)}$

6. $\boldsymbol{\log_a(t^r) = r \cdot \log_a(t)}$

Exemples :

a) $los_a\left(x\sqrt{x^2+1}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \log_a(x) + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$

b) $\log_a\left(\frac{x^2}{(x-1)^3}\right) =$

c) $\log_a\left(\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^4}\right) =$

Formule de changement de base :
Si $a \neq 1, b \neq 1$ et t sont des nombres réels positifs, alors

$$\boldsymbol{\log_a(t) = \frac{\log_b(t)}{\log_b(a)}}$$

Preuve : Posons $y = \log_a(t)$.
On a que :

$$a^y = t$$

Donc

$$\log_b(a^y) = log(t)$$

Par la propriété 6, nous avons :

$$ylog_b(a) = \log_b(t)$$

Isolons y :

$$y = \frac{\log_b(t)}{log_b(a)}$$

Finalement :

$$\log_b(t) = \frac{\log_b(t)}{log_b(a)}$$

Exemples :

a) $\log_5(89) = ?$ pas de touche à la calculatrice ! On utilise la formule de changement de base :

$\log_5(89) = \frac{\log(89)}{\log(5)} \cong 2,7889$

b) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{5}\right) =$

3. La fonction logarithme

3.1 Définition

Soit $f : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x^n}$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{R}$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet donc des primitives.

- Si $\boxed{n \neq -1}$: on sait que les primitives de f sont de la forme :
  $\int x^n dx = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

- Si $\boxed{n = -1}$: que se passe-t-il ?

La primitive $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{c}$ n'est pas valable car la division par zéro est interdite.

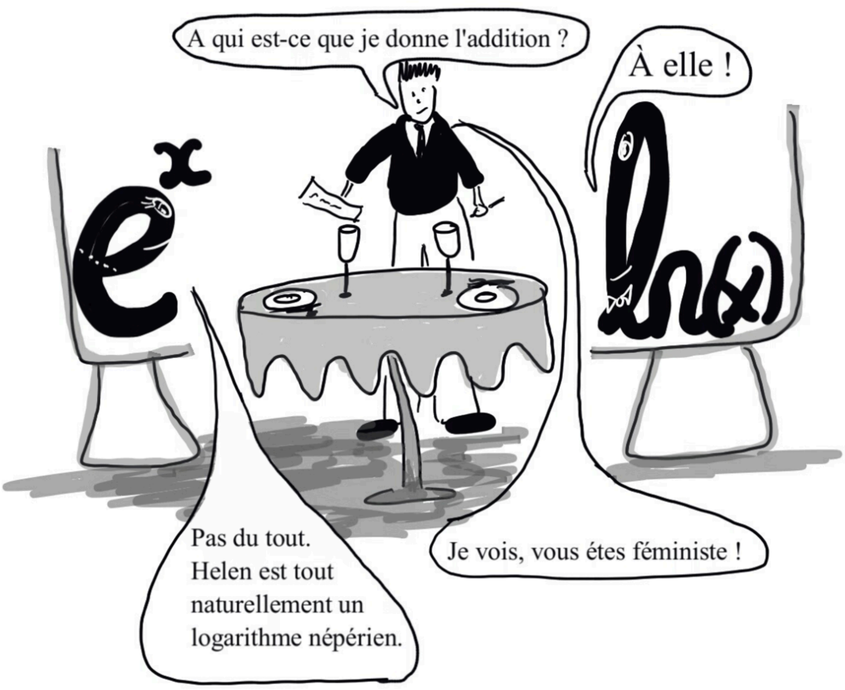
$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \neq \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + c = \frac{x^0}{0} + c$$

Nous savons que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et que toute fonction continue sur un intervalle fermé est intégrable. Donc il existe un intervalle (attention, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !) sur lequel f est intégrable.
Et comme l'intégrale définit une primitive de f (d'après le théorème fondamental du calcul intégral), on sait que la fonction $x \mapsto \int_a^x \frac{1}{t}\,dt\ \ de\ \mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, est la primitive de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = a$.

Parmi ces primitives, celle qui associe 1 à 0 ($1 \mapsto 0$) fait l'objet de la définition suivante :

Définition : On appelle ***fonction logarithme naturel*** la fonction (notée ln):

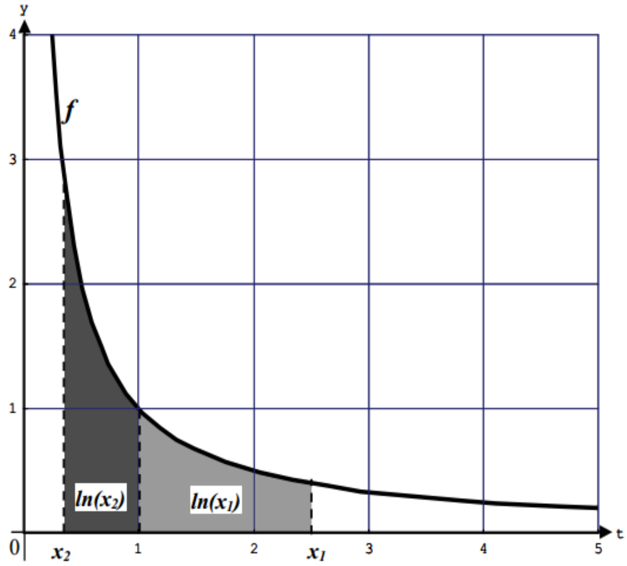
$$ln : x \mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\ de\ \mathbb{R}_+^*\ vers\ \mathbb{R}$$



3.2 Propriétés de la fonction $\ln$

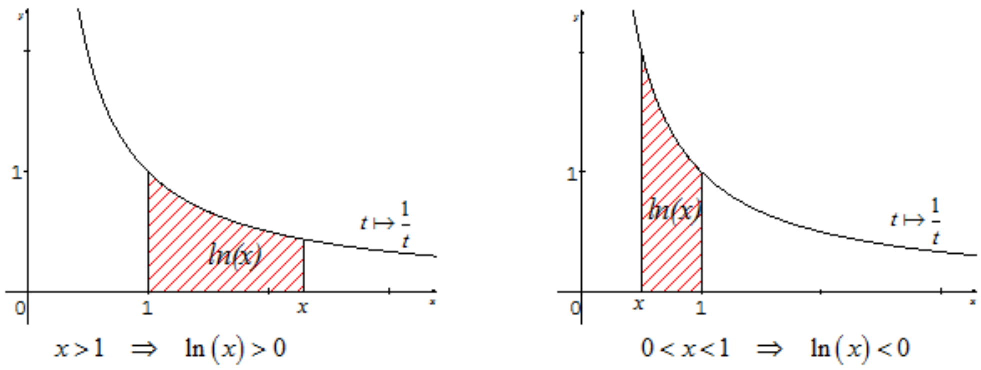
Interprétation géométrique :

Nous pouvons "visualiser" cette fonction ln, puisque si $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\ln(x)$ est l'aire du domaine délimité par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'axe horizontal et les verticales passant par $(1; 0)$ et $(x; 0)$:



On remarque :

- Si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) = \int_1^t \frac{1}{t}\, dt = -\underbrace{\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt}_{>0} < 0$
- Si $x > 1$ alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt > 0$



A partir de la définition, nous obtenons les propriétés suivantes pour la fonction ln :

Propriété 1 : $D_f = \mathbb{R}_+^*$

Le domaine de définition exclut donc zéro et toutes les valeurs de $x < 0$. De ce fait, il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

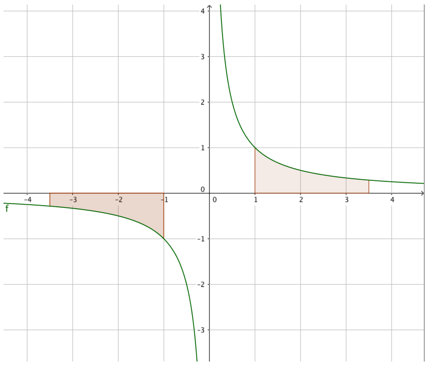
Propriété 2 : $\ln(1) = 0$

Par définition de l'intégrale : $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$.

La fonction ln admet un zéro en $x = 1$

Propriété 3 : $(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

D'après le théorème fondamental, $\ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x} \;\; \forall x \in \mathbb{R}_+^*$



Remarquons que la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle est continue aussi bien sur $]0; \infty[$ que $]-\infty; 0[$.

Nous pourrons calculer l'aire sous f du côté négatif grâce à une symétrie :

Ainsi :

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$$

Exemple :

$$\int_{-3,5}^{-1} \frac{1}{x} dx = ln|x|\Big|_{-3,5}^{-1} = -\int_{1}^{3.5} \frac{1}{x} dx = ln|x|\Big|_{1}^{3,5}$$

Propriété 4 : ln est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Preuve :

Comme ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Sa dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

ce qui implique que $\ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque :

Comme $\ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x)$ est négative si $0 < x < 1$ et positive si $x > 1$.

On peut donc construire le tableau de signes suivant :

x		0		1	
$\ln(x)$	/	/	-	0	+

Propriété 5 : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve :

Si $y \in \mathbb{R}_+^*$ (une constante), les fonctions $F: x \longmapsto \ln(x)$ et $G: x \mapsto \ln(xy)$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ ont la même fonction dérivée, car :

$$F(x) = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \ln(xy) = F(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt$$

Donc

$$F'(x) = \frac{1}{x} \ \ et\ G'(x) = \frac{1}{x}$$

Comme Fet G sont primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors F et G ne diffèrent que par une constante :

$$G(x) = F(x) + c\ , c \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(xy) = \ln(x) + c\ , c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante c, on pose $x = 1$ dans la dernière égalité.

On obtient :

$$\ln(1y) = \underbrace{\ln(1)}_{0} + c \Leftrightarrow \ln(y) = c$$

Conclusion : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Exemple : $ln(3) + ln(5) = ln(15)$

Propriété 6 : $\ln(x^p) = p \cdot \ln(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \forall p \in \mathbb{R}$

Preuve : $(\ln(x^p))' =$ prop 3 + $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$

$$= \frac{1}{x^p}(x^p)'$$

$$= \frac{1}{x^p} \cdot p \cdot x^{p-1} \underbrace{=}_{algèbre} p \cdot \frac{1}{x} \underbrace{=}_{prop\ 3} (p \cdot \ln(x))'$$

Comme $(\ln(x^p))' = (p \cdot \ln(x))'$, cela signifie que $\ln(x^p)$ et $p \cdot \ln(x)$ ne diffèrent que d'une constante :

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante, posons $x = 1$.

On obtient :

$$\ln(1^p) = p \cdot ln(1) + c$$

$$\Leftrightarrow 0 = p \cdot 0 + c$$

$$\Leftrightarrow c = 0$$

Donc :

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) + 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^p) = p \cdot \ln(x)$$

Propriété 7 : $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve : Posons $\frac{y}{y} = y \cdot \frac{1}{y} = 1$

$$\Leftrightarrow \ln\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \underbrace{\ln(1) = 0}_{prop\ 2}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{prop\ 5} \ln(y) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

Propriété 8 : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

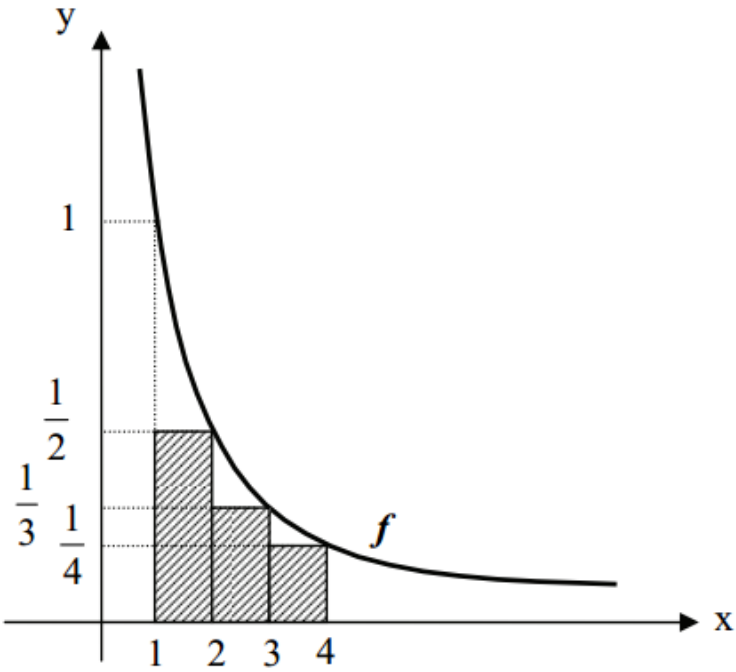
Preuve : Posons $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \underbrace{=}_{prop\ 5} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \underbrace{=}_{prop\ 7} \ln(x) - \ln(y)$$

Propriété 9 : $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

Preuve :

Nous allons raisonner à l'aide d'un dessin :



Nous savons que $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ représente l'aire définie entre 1 et x par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ et cette aire est supérieure à celle définie par les rectangles dessinés sous la courbe, dont la base vaut toujours 1 et la hauteur $\frac{1}{n}$.

Par exemple :
Pour calculer cette dernière somme, nous allons faire la comparaison entre cette somme et une autre somme qui est plus petite, car on y a remplacé certaines fractions par d'autres plus petites

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots >$$
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{4\,fois}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{8\,fois}\right) + \left(\underbrace{\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}}_{16\,fois}\right) + \cdots$$

Et dans chacune des parenthèses on remarque que l'on obtient chaque fois $\frac{1}{2}$, et l'on pourra obtenir autant de fois $\frac{1}{2}$ que l'on veut, car notre somme contient une infinité de termes. Donc notre somme est plus grande que celle qui correspond à une infinité de $\frac{1}{2}$ et qui tend donc vers l'infini.

Remarque : la fonction ln ne possède donc pas d'asymptote horizontale.

Propriété 10 : $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Preuve : Posons $x = \frac{1}{y}$ donc $x \to 0^+ \Leftrightarrow y \to \infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \underbrace{=}_{prop\ 7} \lim_{y\to\infty} (-\ln(y)) \underbrace{=}_{prop\ des\ limites} -\lim_{y\to\infty} \ln(y) \underbrace{=}_{prop\ 9} -\infty$$

Remarque : la fonction ln possède une asymptote verticale en $x = 0$

Propriété 11 : $\ln(e) = 1$

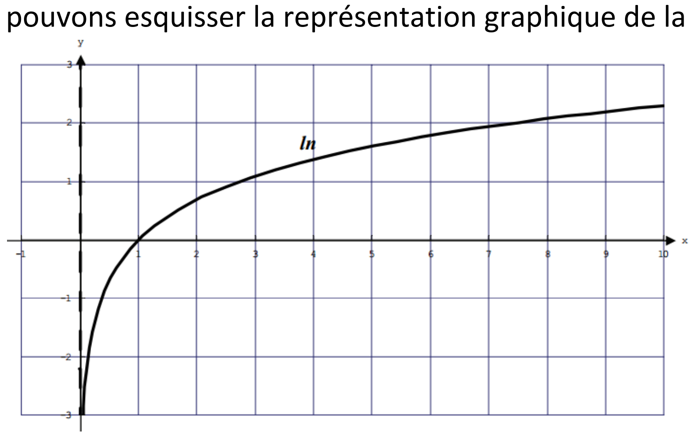
Des propriétés 4),9) et 10), on peut déduire que ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que chaque $y \in \mathbb{R}$ possède une unique préimage, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En particulier, il existe un unique nombre réel, noté e, tel que $\ln(e) = 1$.
e est la préimage de 1 par ln, c'est-à-dire: $\ln(e) = 1$ ou $\int_1^e \frac{1}{t}\ dt = 1$

e est un nombre irrationnel et $e \approx 2{,}71828 \ldots$, c'est le ***nombre d'Euler***

3.3 Représentation graphique de la fonction ln :

A part $\ln(1)$, nous ne pouvons pour le moment calculer aucune image ! Mais, en connaissant les 2 limites, en sachant que la fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant le fait que la pente de la tangente est donnée par $\frac{1}{x}$ (donc la courbe "s'aplatit rapidement"), nous pouvons esquisser la représentation graphique de la fonction ln:



4. La fonction Exponentielle

4.1 Définition :

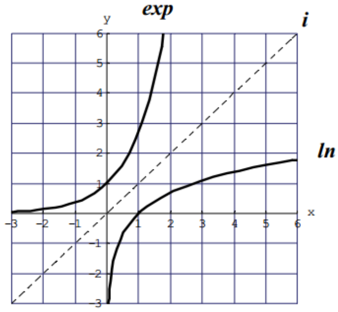
Nous voulons considérer la réciproque[3] de la fonction ln. Pour cela, il faut tout d'abord montrer que cette réciproque existe, donc que ln est une fonction bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
- Nous savons que $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.
  Comme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, chaque élément de $\mathbb{R}$ a **au moins** une préimage par ln dans $\mathbb{R}_+^*$ (surjectivité)
- Chaque préimage est **unique (injectivité)**.
  Dans le cas contraire, il existerait deux nombres x_1 et x_2 distincts ayant la même image ; on aurait, par exemple, $x_1 < x_2$ et $\ln(x_1) = \ln(x_2)$. Mais ceci n'est pas possible, car nous savons que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, par conséquent : $x_1 < x_2 \Longrightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2)$

En conclusion : La fonction ln est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.
Nous pouvons donc définir une fonction réciproque de ln, que nous noterons $\boldsymbol{exp}$:

Définition : La fonction $\mathbf{exp}$ est la réciproque de la fonction ln
Autrement dit : $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y)\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \forall y \in \mathbb{R}$
On peut aussi écrire: $\ln(\exp(y)) = y\ et\ exp(\ln(x)) = x\ \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\ et\ \forall y \in \mathbb{R}$

Représentation graphique :
A partir de cette définition, nous pouvons donner une représentation graphique de la fonction exp :

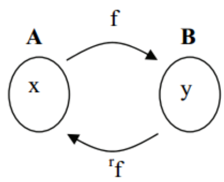


Remarque : La fonction exp est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ car elle est la réciproque de la fonction bijective ln de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.

---

[3] **Rappels :**

- Soit $f: A \to B$ une fonction
  f est bijective $\Leftrightarrow\ \forall y \in B\ \exists\ un\ unique\ x \in A\ tel\ que\ y = f(x)$
- Soit $f: A \to B$ une fonction bijective
  ${}^r f: B \to A$ est telle que ${}^r f(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y\ \forall x \in A\ et\ \forall y \in B$
  ${}^r f$ est appelée la fonction réciproque de la fonction f



- f admet une fonction réciproque de B vers $A \Leftrightarrow f$ est une fonction bijective de A vers B.
  La fonction réciproque d'une bijection est aussi bijective.
  Dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction f et de sa réciproque ${}^r f$ présentent une symétrie par rapport à la droite $i(x) = x$

4.2 Propriétés de la fonction exp

A partir de cette définition, nous pouvons obtenir les propriétés suivantes de la fonction exp :

Propriété 1 : $D_f = \mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

Preuve :
car exp est la réciproque de la fonction ln qui est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$.
La fonction exp n'admet pas de zéro.

Propriété 2 : $\exp(0) = 1$ (ordonnée à l'origine)

Preuve :

On a $\exp(\ln(x)) = x$ donc en posant $x = 1$ on a: $\exp\left(\underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) = 1$

Propriété 3 : $\exp(1) = e$

Preuve :

On a $\exp(\ln(x)) = x$ donc en posant $x = e$ on a: $\exp\left(\underbrace{\ln(e)}_{=1}\right) = e$

Propriété 4 : La fonction exp est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))' = \exp(x)$

Preuve : On a : $\ln(\exp(x)) = x$

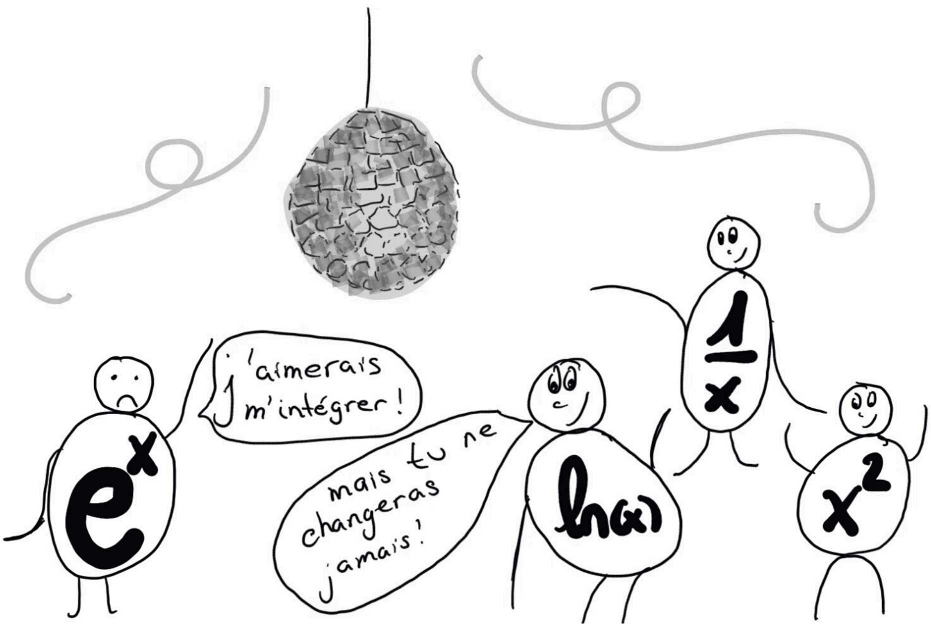
Dérivons l'égalité (puisque deux fonctions égales ont la même dérivée) :

$$(\ln(\exp(x)))' = (x)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\exp(x)}(\exp(x))' = 1 \qquad \textit{Dérivée d'une fonction composée}$$

$$\Leftrightarrow (\exp(x))' = \exp(x)$$

Remarque : Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))' = \exp(x)$, la fonction exp est primitive d'elle-même sur $\mathbb{R}$.



Propriété 5 : La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve :

exp est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$
Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée $(\exp(x))' = \exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Remarque : Comme exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, exp est $\begin{cases} < 1, si\ x < 0 \\ > 1, si\ x > 0 \end{cases}$

Propriété 6 : $\exp(x_1)\exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)\ , \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Preuve :

$$\ln(\exp(x_1)\exp(x_2))$$
$$\underbrace{=}_{prop\ ln} \ln(\exp(x_1)) + \ln(exp(x_2))$$
$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} x_1 + x_2$$
$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} \ln(exp(x_1 + x_2))$$

Donc :

$$\ln(exp(x_1)\,exp(x_2)) = \ln(exp(x_1 + x_2))$$

Comme ln bijective donc $\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$

$$\Leftrightarrow \exp(x_1)\exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$$

Propriété 7 : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}\ \forall x \in \mathbb{R}$

Preuve :

$$\ln\left(\frac{1}{exp(x)}\right)$$
$$\underbrace{=}_{prop\ ln} -\ln(\exp(x))$$
$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} -x$$
$$\underbrace{=}_{déf\ réciproque} \ln(exp(-x))$$

Donc : $\ln\left(\frac{1}{exp(x)}\right) = \ln(exp(-x))$

Comme ln bijective ($\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

Propriété 8 : $\frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} = \exp(x_1 - x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Preuve : $\frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} = \exp(x_1) \cdot \frac{1}{\exp(x_2)}$

$$\underbrace{=}_{prop\ 7} \exp(x_1) \cdot \exp(-x_2)$$

$$\underbrace{=}_{prop\ 6} \exp\big(x_1 + (-x_2)\big)$$

$$= \exp(x_1 - x_2)$$

Propriété 9 : $(\exp(x))^n = \exp(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}$

Preuve :

$$\ln([\exp(x)]^n) \underbrace{=}_{prop\ ln} n \cdot \ln(exp(x)) \underbrace{=}_{déf\ réciproque} nx \underbrace{=}_{déf\ réciproque} \ln(exp(nx))$$

Donc

$$\ln([\exp(x)]^n) = \ln(exp(nx))$$

Comme ln bijective ($\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$) :

$$\Leftrightarrow [\exp(x)]^n = \exp(nx)$$

Propriété 10 : $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$

Car : $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

Propriété 11 : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

Car : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Propriété 12 : $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a vu que $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\exp(n) = \exp(n \cdot 1) = [\exp(1)]^n = e^n$

Soit $n \in \mathbb{Z}_-^*$, on a : $\exp(n) \underbrace{=}_{n=-p} \exp(-p) = \frac{1}{\exp(p)} = \frac{1}{e^p} = e^{-p} = e^n$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on admettra sans démonstration que : $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- ***Analyse Série 1 exercices 6 à 9 & Analyse Série 7 & Monographie n°25 de CRM p.223 ex 6.16 et 6.17***

Table des matières