

## Analyse Série 2

---

**Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !**

---

### Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

a)  $f(x) = 6x^2$

b)  $f(x) = 12x^6 - x^3$

c)  $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

d)  $f(x) = 3\sqrt{x}$

e)  $f(x) = \frac{5}{x^6}$

f)  $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

g)  $f(x) = \frac{x^4+3x}{x^3}$

h)  $f(x) = \frac{2x^6-4x^3+5}{x^6}$

i)  $f(x) = \sqrt{3}$

---

### Exercice 2:

Démontrer que  $\lambda \cdot \frac{f^{n+1}}{n+1}$  est une primitive de  $\lambda \cdot f^n \cdot f'$ , si  $n \neq -1$

---

### Exercice 3:

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] - 1; \infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

a) Démontrer que la fonction  $F(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1}$  est une primitive sur  $] - 1; \infty[$

b) La fonction  $G(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$  est-elle aussi une primitive de  $f$  sur  $] - 1; \infty[$  ?

c) Si  $F$  et  $G$  sont les deux des primitives de  $f$  sur  $] - 1; \infty[$ , comment sont-elles liées ?

d) Donner la forme générale de la primitive de  $f$  sur  $] - 1; \infty[$ .

---

### Exercice 4:

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  qui satisfait à la condition donnée. Vérifier votre réponse en comparant les graphiques de  $f$  et de  $F$ .

a)  $f(x) = 2x, F(0) = 1$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}, F(1) = \frac{5}{2}$

c)  $f(x) = -2x^5 + 5x^4, F(0) = 4$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^2}, \forall x \in ]0; \infty[, F(1) = -1$

e)  $f(x) = 2x + 2, F(-1) = 0$

---

### Exercice 5:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -x + 6, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

**Exercice 6:**

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  qui satisfait à la condition donnée. Vérifier votre réponse en comparant les graphiques de  $f$  et de  $F$ .

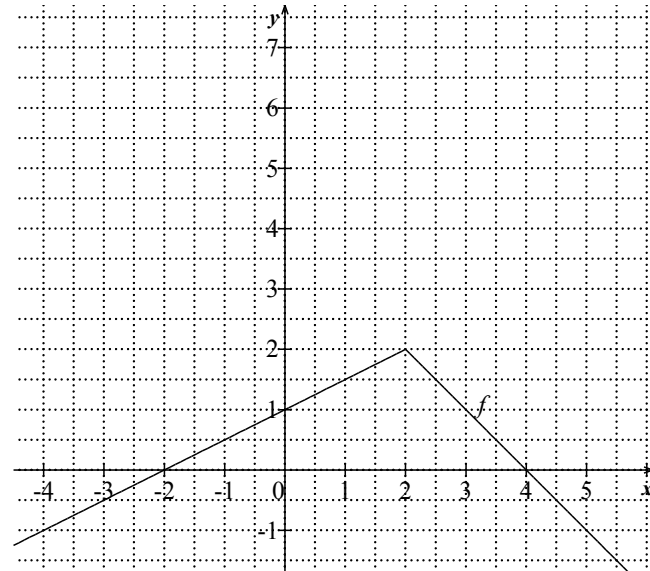
$$a) f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq 0 \\ -2x, & \text{si } x > 0 \end{cases}, F(0) = -4$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -x + 6, & \text{si } x > 4 \end{cases}, F(0) = 1$$

**Exercice 7:**

$f$  est la fonction représentée ci-contre.

- Déterminer l'expression fonctionnelle de  $f$
- Déterminer les primitives de  $f$ .
- Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(-1) = 1$ .
- Représenter  $F$  sur le graphique ci-contre.

**Exercice 8:**

Déterminer les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  en tenant compte des conditions imposées.

- La courbe représentative de  $f$  passe par le point  $(1; 6)$  et la pente de sa tangente en  $(x; f(x))$  est donnée par la formule  $2x + 1$ .
- $g'(x) = 3x^2 - 4$ ,  $g(5) = 54$
- $h''(x) = 2x$ ,  $h'(2) = 8$ ,  $h(-2) = -8$

**Exercice 9:**

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

- $f(x) = 30(2x + 7)^{14}$
- $f(x) = 30x(x^2 + 7)^{14}$
- $f(x) = x(2x^2 + 7)^{14}$
- $f(x) = 125 \cdot (5x^3 + 10x)^{24} \cdot (3x^2 + 2)$
- $f(x) = 3 \cdot (x^3 + 6x)^{10} \cdot (x^2 + 2)$
- $f(x) = \sqrt{5x + 3}$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$
- $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$

**Exercice 10:**

- $f(x) = \frac{5}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 1$
- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$
- $f(x) = (x + 1)^2$
- $f(x) = (2x + 1)^3$
- $f(x) = (2 - x)^{12}$
- $f(x) = 6x(3x^2 + 1)^2$
- $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^5$
- $f(x) = 6x(1 - x^2)^3$
- $f(x) = (1 - 2x)^2$
- $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
- $f(x) = -\frac{4}{x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}$

13)  $f(x) = \frac{x^3-3}{x^2}$

14)  $f(x) = \frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

15)  $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$

16)  $f(x) = (3x+2)^6$

17)  $f(x) = (16x-10)(4x^2-5x)^2$

18)  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$

19)  $f(x) = x\sqrt{x}$

20)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

21)  $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

22)  $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

23)  $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

24)  $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x}$

25)  $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{ax^2+b}, a \neq 0$

26)  $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

27)  $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$

28)  $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$

29)  $f(x) = (3x^2+1)\sqrt{x^3+x+2}$

30)  $f(x) = (x+2\sqrt{x})^2$

**Exercice 11:**

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

a)  $f(x) = \sin(x)$

c)  $f(x) = \cos(6x)$

e)  $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$

b)  $f(x) = \cos(x)$

d)  $f(x) = \sin^7(x)\cos(x)$

f)  $f(x) = \sin(3x)$

Plus d'exercices ? CRM n°25, Analyse, p.95-97 exercices 3.77 à 3.85

**Solutions:**

Ex 1: a)  $F(x) = 2x^3 + c, c \in \mathbb{R}$  b)  $F(x) = \frac{12}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^4 + c, c \in \mathbb{R}$  c)  $F(x) = 4\sqrt[4]{x^5} - 4\sqrt[4]{x^7} + c$

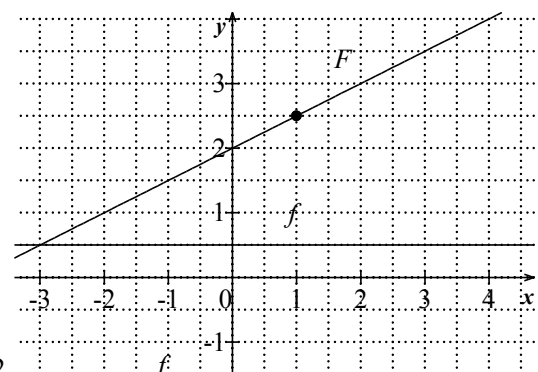
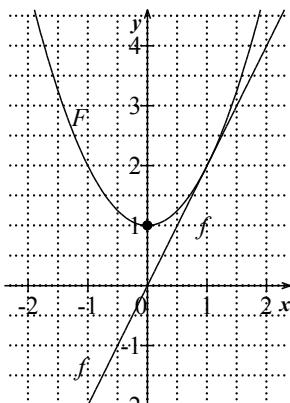
d)  $F(x) = 2x\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$  e)  $F(x) = -\frac{1}{x^5} + c, c \in \mathbb{R}$  f)  $F(x) = \frac{4}{7}x^4\sqrt{x^3} + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + c, c \in \mathbb{R}$

g)  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + c, c \in \mathbb{R}$  h)  $F(x) = 2x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^5} + c, c \in \mathbb{R}$  i)  $F(x) = \sqrt{3} \cdot x + c, c \in \mathbb{R}$

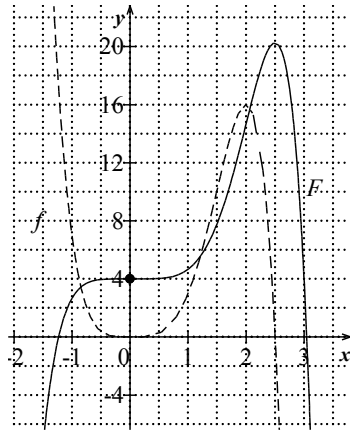
Ex 2:  $\left(\lambda \cdot \frac{f^{n+1}}{n+1}\right)' = \lambda \cdot \left(\frac{f^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{\lambda}{n+1} \cdot (f^{n+1})' = \frac{\lambda}{n+1} \cdot (n+1) \cdot f^{n+1-1} \cdot f' = \lambda \cdot f^n \cdot f'$  (si  $n \neq -1$ )

Ex 3: a)  $F'(x) = \dots = f(x)$  b)  $G'(x) = f(x)$  c)  $F(x) - G(x) = \text{constante}$  d)  $F(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1} + c, c \in \mathbb{R}$

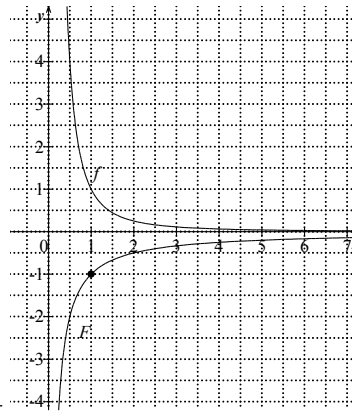
Ex 4: a)  $F(x) = x^2 + 1$



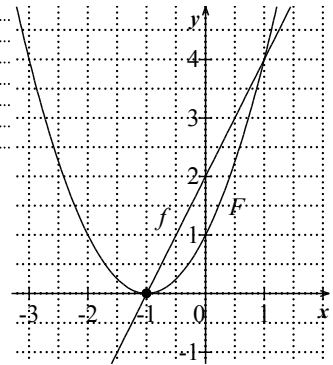
b)  $F(x) = \frac{1}{2}x + 2$



c)  $F(x) = -\frac{1}{3}x^6 + x^5 + 4$

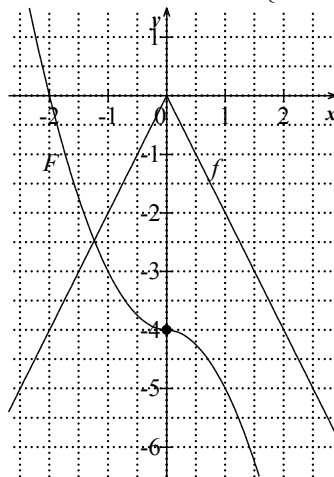


d)  $F(x) = -\frac{1}{x}$



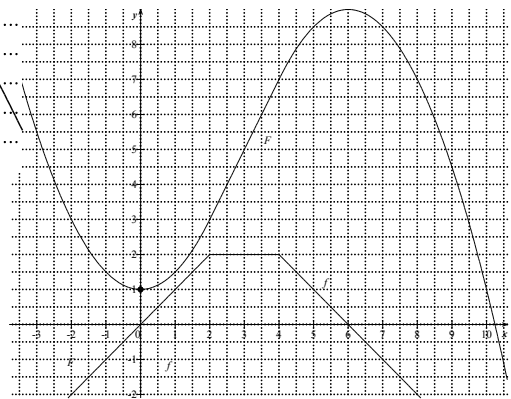
e)  $F(x) = x^2 + 2x + 1$

**Ex 5:** a)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + c, & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4} + c; & \text{si } x > 1 \end{cases}$       b)  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 + C & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x^2}{2} + 6x - 10 + C & \text{si } x > 4 \end{cases}$

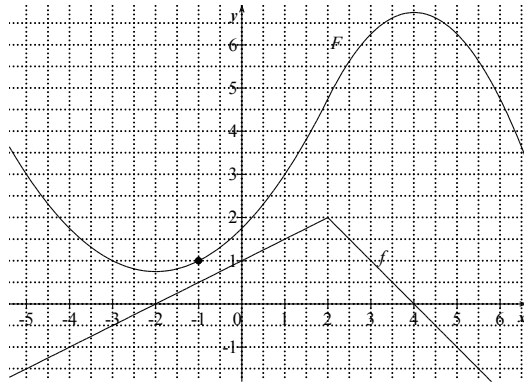


**Ex 6:** a)  $F(x) = \begin{cases} x^2 - 4; & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - 4; & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b)  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x^2}{2} + 6x - 9, & \text{si } x > 4 \end{cases}$



**Ex 7:** a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$       b)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + x + c \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 + c, & \text{si } x < 2 \end{cases}$       c)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{4}, & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{4}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$



d)

**Ex 8:** a)  $f(x) = x^2 + x + 4$  b)  $g(x) = x^3 - 4x - 51$  c)  $h(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + \frac{8}{3}$

**Ex 9:** a)  $F(x) = (2x + 7)^{15} + c$  b)  $F(x) = (x^2 + 7)^{15} + c$  c)  $F(x) = \frac{1}{60}(2x^2 + 7)^{15} + c$  d)  $F(x) = (5x^3 + 10x)^{25} + c$   
 e)  $F(x) = \frac{1}{11}(x^3 + 6x)^{11} + c$  f)  $F(x) = \frac{2}{15}\sqrt{(5x + 3)^3} + c$  g)  $F(x) = \sqrt{x^2 + 5} + c$  h)  $F(x) = \sqrt{x^3 - x} + c$

**Ex 10:** 1)  $F(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + x + C$  2)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$  3)  $F(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C$

4)  $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$  5)  $F(x) = -\frac{1}{13}(2-x)^{13} + C$  6)  $F(x) = \frac{1}{3}(3x^2+1)^3 + C$  7)  $F(x) = \frac{1}{6}(x^2-3x+1)^6 + C$

8)  $F(x) = -\frac{3}{4}(1-x^2)^4 + C$  9)  $F(x) = -\frac{1}{6}(1-2x)^3 + C$  10)  $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + C$  11)  $F(x) = \frac{1}{1-x} + C$

12)  $F(x) = \frac{4}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^4} + C$  13)  $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + C$  14)  $F(x) = \frac{-1}{2(1+2x^3)} + C$  15)  $F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + C$

16)  $F(x) = \frac{1}{21}(3x+2)^7 + C$  17)  $F(x) = \frac{2}{3}(4x^2-5x)^3 + C$  18)  $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+3} + C$

19)  $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$  20)  $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$  21)  $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$

22)  $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$  23)  $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

24)  $F(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + C$  25)  $F(x) = \frac{3}{8a}\sqrt[3]{(ax^2+b)^4} = \frac{3}{8a}(ax^2+b)\sqrt[3]{ax^2+b} + C$

26)  $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} + C$  27)  $F(x) = 2\sqrt{9+x^3} + C$

28)  $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x^3+8} + C$  29)  $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3+x+2)^3} = \frac{2}{3}(x^3+x+2)\sqrt{x^3+x+2} + C$

30)  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{5}\sqrt{x^5} + C$

**Ex 11:** a)  $F(x) = -\cos(x) + C$  b)  $F(x) = \sin(x) + C$  c)  $F(x) = \frac{1}{6}\sin(6x) + C$

d)  $F(x) = \frac{1}{8}\sin^8(x) + C$  e)  $F(x) = -2\cos(x) + 3\sin(x) + C$  f)  $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$

Plus d'exercices ? Voir Monographie de la CRM n°25, *Analyse*, exercices p.94-97