Analyse Série 3

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1:

a) Représenter la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0; 4]$

b) Calculer une somme de Riemann à deux termes pour estimer l'aire sous la courbe entre 0 et 4 avec $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, \xi_1 = 1$ et $\xi_2 = 3$

c) Calculer une somme de Riemann à quatre termes pour approcher l'aire de cette même courbe avec $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, \xi_1 = 0{,}5, \xi_2 = 1{,}5$, $\xi_3 = 2{,}5$ et $\xi_4 = 3{,}5$

d) Comparez vos résultats obtenus en b) et c) avec la valeur exacte : $\frac{16}{3} = 5,\overline{3}$

Exercice 2:

Sachant que $\int_0^1 f(x)dx = 3, \int_1^2 f(x)dx = 4 \ et \ \int_2^3 f(x)dx = -8$, calculer:

a) $\int_0^2 f(x)dx$ b) $\int_0^1 3 \cdot f(x)dx$ c) $\int_0^3 8 \cdot f(x)dx$ d) $\int_3^1 2 \cdot f(x)dx$

Exercice 3:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2, a = 0$ et $b = 1$.

a) On divise l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles de même longueurs.
Calculer la somme de Riemann en prenant les ξ_k au milieu de $[x_{k-1}; x_k]$
Dessiner la situation

b) Même question qu'en a) mais on divise maintenant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles de même longueurs.

Exercice 4:

Calculer les intégrales définies à l'aide d'une représentation graphique (graphique de la fonction, bornes et axes):

a) $\int_{-2}^4 5dx$ b) $\int_1^{10} -\sqrt{2}dx$ c) $\int_2^6 (x+3)dx$ d) $\int_{-3}^4 dx$ e) $\int_{-1}^1 xdx$ f) $\int_{-2}^2 (-x+1)dx$

Exercice 5:

On sait que $\int_1^4 x^2dx = 21$ et $\int_1^4 xdx = \frac{15}{2}$

A l'aide des propriétés des intégrales, calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_1^4 (3x^2+5)dx$ b) $\int_1^4 (6x-1)dx$ c) $\int_1^4 (2-9x-4x^2)dx$ d) $\int_1^4 (3x+2)^2dx$

Exercice 6:

Exprimer à l'aide d'une seule intégrale:

a) $\int_5^9 f(x)dx + \int_{-3}^5 f(x)dx$

b) $\int_1^4 f(x)dx - \int_6^4 f(x)dx$

c) $\int_c^e f(x)dx - \int_c^d f(x)dx,\ c < d < e$

d) $\int_{-2}^6 f(x)dx + \int_2^{-2} f(x)dx$

e) $\int_c^{c+h} f(x)dx - \int_c^h f(x)dx, 0 < c < h$

f) $\int_c^m f(x)dx - \int_d^m f(x)dx,\ c < d < m$

Exercice 7:

Trouver un nombre c qui satisfait la conclusion du théorème de la moyenne, puis déterminer la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

a) $\int_0^3 3x^2 dx = 27$

b) $\int_{-4}^{-1} \frac{3}{x^2} dx = \frac{9}{4}$

c) $\int_{-2}^1 (x^2 + 1)dx = 6$

d) $\int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 3)dx = 32$

e) $\int_{-1}^8 3\sqrt{x+1}dx = 54$

f) $\int_{-2}^{-1} \frac{8}{x^3} dx = -3$

Un autre exercice ? Voir Analyse, CRM n°25, p.183 ex 5.7

Solutions:

Ex 1: b) $2\sqrt{1} + 2\sqrt{3} \cong 5{,}46$ c) $\sqrt{0{,}5} + \sqrt{1{,}5} + \sqrt{2{,}5} + \sqrt{3{,}5} \cong 5{,}38$ c) plus le nombre de partage grandit, plus le résultat s'approche de la valeur exacte.

Ex 2: a)7 b) 9 c) -8 d)8

Ex 3: a) $x_0 = 0, x_1 = 0{,}2, x_2 = 0{,}4, x_3 = 0{,}6, x_4 = 0{,}8, x_5 = 1$

$\sum_{k=1}^5 f(\xi_k)\Delta x = 0{,}2 \cdot 0^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}1^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}3^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}7^2 + 0{,}2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}33$ b) 0,3325

Ex 4: a) 30 b) $-9\sqrt{2}$ c) 28 d) 7 e) 0 f) 4

Ex 5: a) $3 \cdot 21 + 15 = 78$ b) $6 \cdot \frac{15}{2} - 3 = 42$ c) $6 - 9 \cdot \frac{15}{2} - 4 \cdot 21 = -145{,}5$

d) $9 \cdot 21 + 12 \cdot \frac{15}{2} + 12 = 291$

Ex 6: a) $\int_{-3}^9 f(x)dx$ b) $\int_1^6 f(x)dx$ c) $\int_d^e f(x)dx$ d) $\int_2^6 f(x)dx$ e) $\int_h^{c+h} f(x)dx$ f) $\int_c^d f(x)dx$

Ex 7: a) $c = \sqrt{3} \in]0; 3[\quad f(c) = 9$ b) $c = -2\quad f(c) = \frac{3}{4}$ c) $c = \mp 1\quad f(c) = 2$

d) $c = \frac{5}{3}\ ou\ c = -1\quad f(c) = 8$

e) $c = 3\quad f(c) = 6$ f) $c = \sqrt[3]{-\frac{8}{3}}\quad f(c) = -3$