Analyse Série 4:

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1: On considère la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)^2$.

a) Représentez f

b) calculez l'aire de la surface délimitée par : f, l'axe Ox, l'axe Oy et la droite $x = 1$.

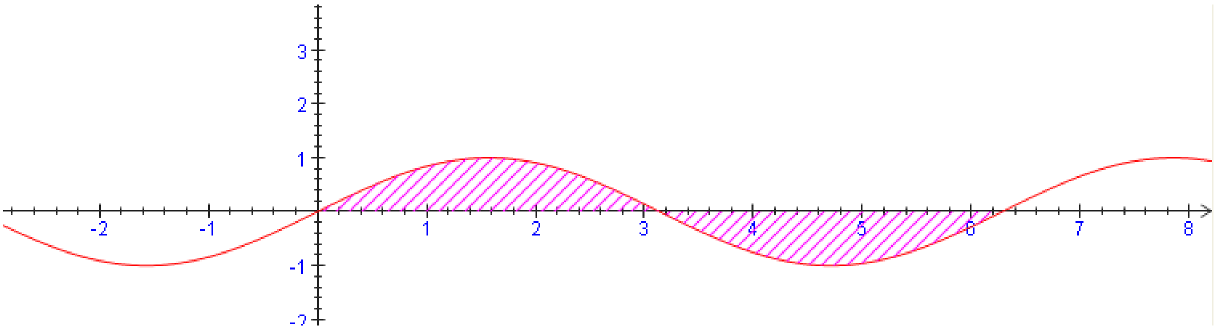
Exercice 2 : On considère la fonction f, définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$

a) Représentez f

b) calculez « l'aire sous f » entre 0 et 3 (aire géométrique)

c) calculez l'aire algébrique de la fonction entre 0 et 3.

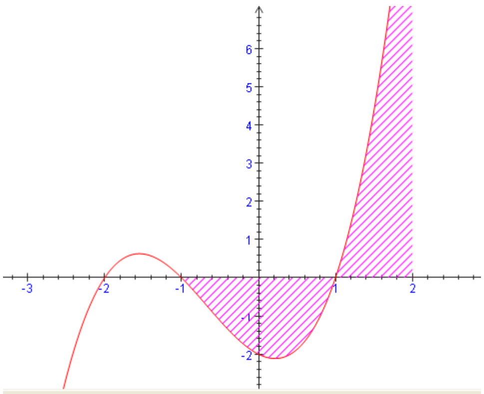
Exercice 3 : Sachant que la fonction représentée est la fonction sinus, calculez la superficie du domaine hachurée



Exercice 4 : $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$

a) Calculez la superficie du domaine hachuré.

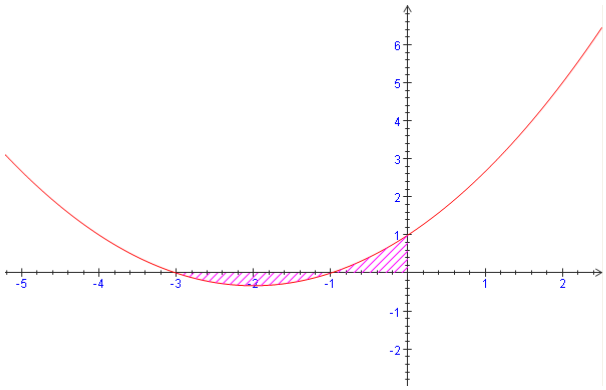
b) Calculez les extrema et le point d'inflexion.



Exercice 5 :

a) Sachant que f est une parabole, déterminez par calcul $f(x)$.

b) Calculez la superficie du domaine hachuré.



Exercice 6 : Considérons les fonctions f et g, définies par $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

a) Dans un repère orthonormé, représentez f et g, puis calculez la superficie du domaine compris entre f et g.
b) Mêmes questions pour :
   a) $f(x) = 6x - x^2$ et $g(x) = x^2 - 2x$
   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ et $g(x) = |x|$

Exercice 7 :

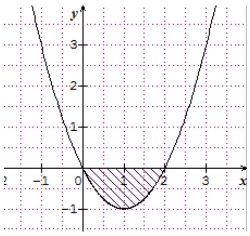
Considérons les fonctions f et g, définies par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ et $g(x) = mx$.
Calculez toutes les valeurs de m pour que la superficie du domaine compris entre f et g vale $9[u.s.]$

(u.s. = unité du système)

Exercice 8:

La fonction représentée ci-contre est $f(x) = x^2 - 2x$

Calculer l'aire algébrique puis géométrique du domaine hachuré.



Exercice 9:
Représenter la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ puis hachurer le domaine sous la courbe de f entre 0 et 4.

Calculer l'aire de ce domaine.

(Nous avons déjà calculé une approximation de cette aire à l'exercice 1 de la Série 3 d'Analyse)

Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 4]$?

Exercice 10:
Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_{-2}^{1}(x^2 - 3x + 2)dx$
b) $\int_{0}^{2}(1 - y)^3 dy$
c) $\int_{-1}^{1}(2 + 3t^2 - 5t^4)dt$
d) $\int_{1/2}^{2}\frac{x^2+1}{x^2}dx$ *séparer en deux fractions*
e) $\int_{1}^{2}\frac{x^3+2}{x^2}dx$
f) $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(x^3+1)^2}dx$

Exercice 11:
Considérons les fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ et $g(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

a) Représenter le domaine fermé compris entre les courbes de f et g
b) Calculer la superficie de ce domaine

Exercice 12:

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, si\ x > 1 \end{cases}$

a) Représenter f et le domaine sous la courbe de f entre -1 et 4
b) Calculer l'aire de ce domaine

Exercice 13:

On considère les paraboles d'équations $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $g(x) = -x^2 - x + 6$

a) Représenter f, g et le domaine fermé compris entre ces deux courbes.
b) Calculer la superficie de ce domaine.

Exercice 14:

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ainsi que la surface S délimitée par la courbe de f, l'axe horizontal et les verticales situées en $x = -2$ et en $x = 2$.

a) Calculer les zéros de f
b) Esquisser la fonction f et hachurer la surface S *(il n'est pas demandé un graphique précis)*
c) Calculer l'aire algébrique de S.
d) Calculer l'aire géométrique de S.

Exercice 15:

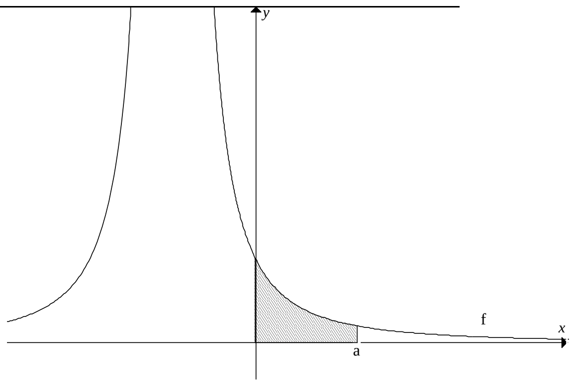
a) Représenter la fonction $f(x) = 9 - x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
b) Calculer les zéros de f ainsi que les équations des tangentes à f en ces points.
c) Déterminer la superficie du domaine fermé compris entre f et ces tangentes.
(utiliser la symétrie du domaine pour raccourcir les calculs)

Exercice 16:

La fonction représentée ci-contre est $f(x) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}$

Exprimer l'aire du domaine hachuré en fonction de a. $(a > 0)$

Vers quelle valeur tend cette aire lorsque a tend vers $+\infty$?



Exercice 17 : Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x), l'axe\ Ox$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ si

a) $f(x) = x^2 + 2, a = -3. b = 3$
b) $f(x) = 9 - x^2, a = -4, b = 4$
c) $f(x) = \frac{4}{x^2} - 1, a = 1, b = 4$

Faire une représentation de chacune des situations

Exercice 18 : Calculer l'aire totale des domaines bornés limités par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox si

a)$f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $f(x)`x^3 - 2x^2 - x + 2$

c) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Exercice 19 : On donne les fonctions f et g. Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des deux fonctions. Représenter chaque situation.

a) $f: x \mapsto x^2$
$g: \mapsto 8 - x^2$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
$g(x) = -x^2 - x - 6$

c) $f: \mapsto x^3 - 5x^2 + 6x$
$g: x \mapsto x^3 - 7x^2 + 12x$

Exercice 20 : Calculer l'aire totale des domaines bornés limités par les courbes d'équations $y = x^3$ et $y = 3x^2 - 2x$

Exercice 21 : Les paraboles d'équations $y = 16 - x^2$, $y = (x - 4)^2$ et $y = -x^2 + 5x + 1$ délimitent trois triangles curvilignes. Déterminer les coordonnées des sommets et l'aire de chacun de ces triangles.

Exercice 22 : Les paraboles d'équation $y = 3(x + 3)^2$ et $y = 3(x - 1)^2$ délimitent avec l'axe Ox un domaine borné. Calculer son aire.

Exercice 23 : Pour quelle valeur du paramètre positif a la courbe d'équation $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ délimite-t-elle avec l'axe Ox, dans le premier quadrant, un domaine d'aire égale à 6 ?

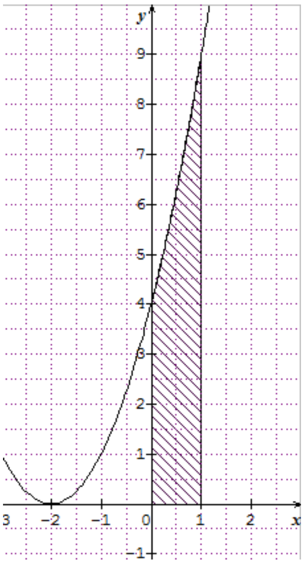
Exercice 24 :

Les axes de coordonnées et la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le 1er quadrant. Déterminer la valeur c pour laquelle la droite d'équation $x = c$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

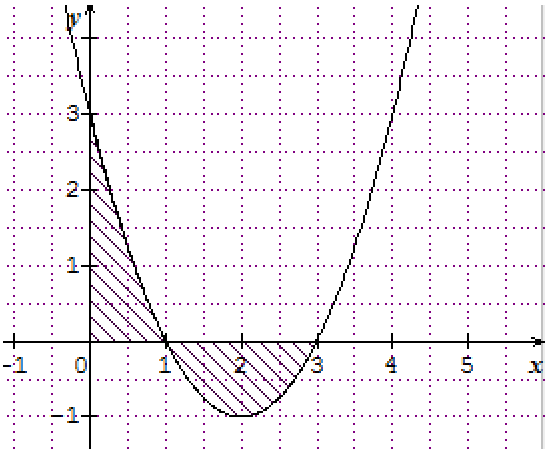
Solutions

Ex 1: b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + c$

$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \frac{19}{3}$

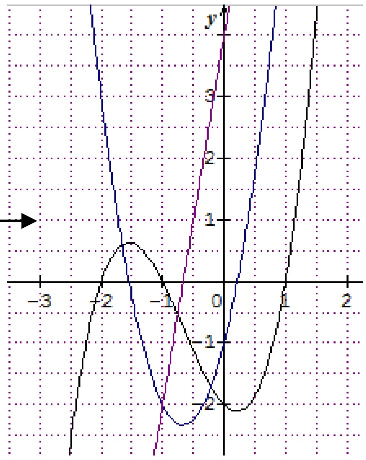


Ex 2: b) $\frac{8}{3}$ c) 0



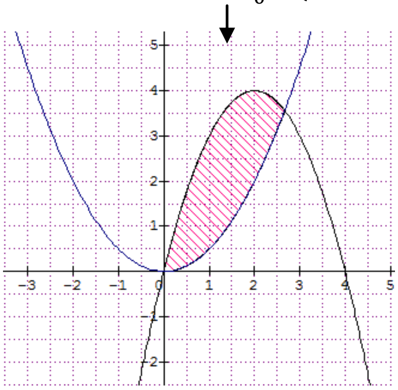
Ex 3: 4 **Ex 4:** a) $-\int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = -2 \cdot F(1) + F(-1) + F(2) = \frac{91}{12}$

b) extrema(zéros de f') : $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ point d'inflexion (zéro de f''): $x = -\frac{2}{3}$



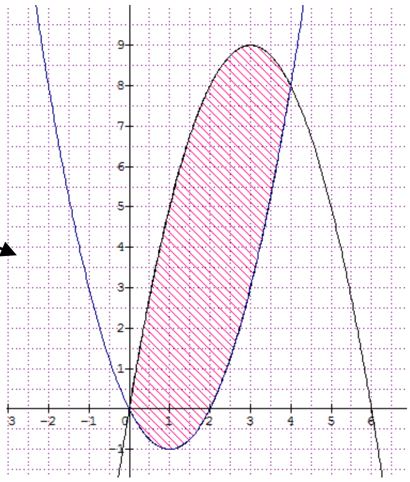
Ex 5: a) $\frac{1}{3}(x+3)(x+1)$ b) $\frac{8}{9}$

Ex 6: a) $\int_0^{8/3}(f(x) - g(x))dx = \left[-\frac{1x^3}{2} + 2x^2\right]_0^{\frac{8}{3}} = \frac{128}{27}$

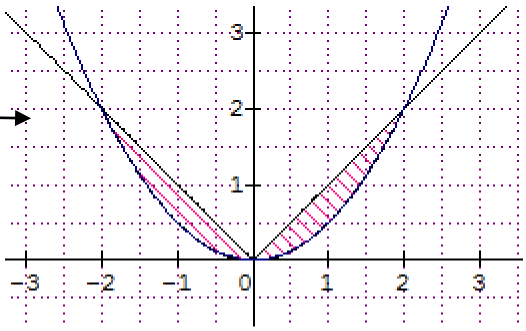


b) a) $\int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 (f(x) - g(x))dx =$

$\int_0^4 (f(x) - g(x))dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}$



b) b) $1,\overline{3} = \frac{4}{3}$

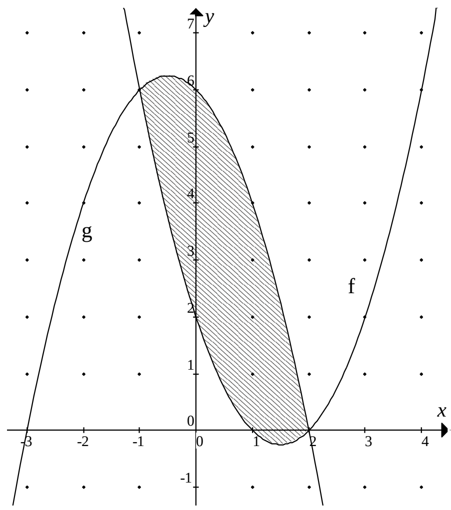


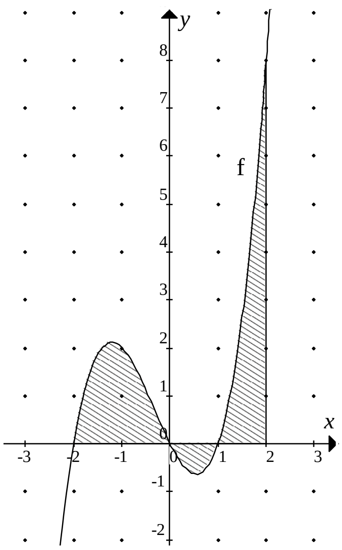
Ex 7: $\int_0^{4m}(g(x) - f(x))dx = \frac{8}{3}m^3$ donc $m = \frac{3}{2}$ **Ex 8:** L'aire algébrique vaut $-\frac{4}{3}$ et l'aire géométrique vaut $\frac{4}{3}$

Ex 9: $Aire = \frac{16}{3}$ La valeur moyenne de f sur $[0;4]$ est $\frac{4}{3}$

Ex 10: a) $\frac{27}{2}$ b) 0 c) 4 d) 3 e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{1}{6}$

Ex 11: La superficie mesure $\frac{1}{3}$ **Ex 12:** $\frac{17}{12}$ **Ex 13:** La superficie vaut 9.





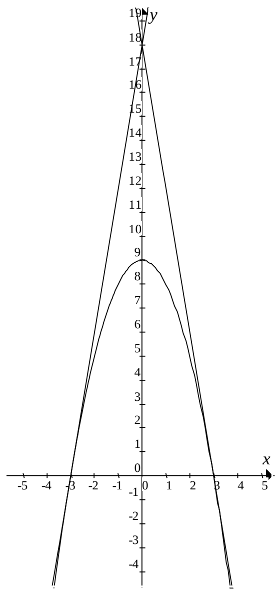
Ex 14: a) $f(x) = x(x^2 + x - 2)$ Les zéros de f sont: $-2; 0$ et 1.

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$

c) Aire algébrique: $A = \int_{-2}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-2) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

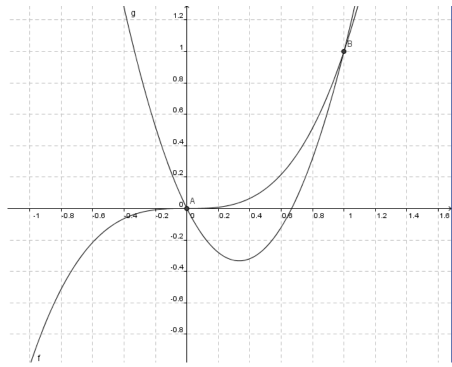
d) Aire géométrique:

$A = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = F(0) - F(-2) - \big(F(1) - F(0)\big) + F(2) - F(1) = \frac{37}{6}$



Ex 15: $T_3(x) = 18 - 6x$ $T_{-3}(x) = 6x + 18$

La superficie mesure 18

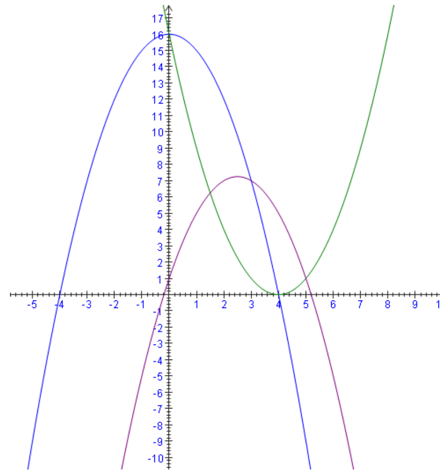


Ex 16: L'aire vaut $4 - \frac{4}{\frac{1}{2}a+1}$ et elle tend vers 4 lorsque a tend vers $+\infty$.

Ex 17 : a) 30 b)128/3 c) 2

Ex 18 : a) 9/2 **b)** 37/12 **c)** 16/3 **Ex 19 : a)** 64/3 **b)** 9

Ex 20 : Réponse ½



Exercice 21 : Sommets : $(0;16)$; $\left(\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$; $(3;7)$; $(4;0)$; $(5;1)$

Aire Δ_1 : $\frac{297}{24}$ Aire Δ_2 : $\frac{215}{24}$ Aire Δ_3 : $\frac{16}{3}$

Ex 22 : 16

Ex 23: $a = 2\sqrt{2}$

Ex 24 : $c \cong 1{,}2091$