

Analyse Série 6

Ne rien écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées

Exercice 1:

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (éventuellement commencer par simplifier l'écriture) :

a) $f(x) = \ln(4x - 5)$

b) $f(x) = \ln(\sqrt{3 - x^2})$

c) $f(x) = \ln(3x^5)$

d) $f(x) = \ln((x^2 + x - 1)^3)$

e) $f(x) = x \ln(x) - x$

f) $f(x) = \ln(\cos(x))$

g) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

h) $f(x) = \ln(\ln(x))$

i) $f(x) = \ln(x - 3)$

j) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

k) $f(x) = \ln(-5x)$

l) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

m) $f(x) = \ln^2\left(\frac{1}{x}\right)$

n) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)$

Exercice 2:

Déterminer la valeur des intégrales suivantes : (réponse en valeur exacte)

a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+2}\right) dx$

b) $\int_0^2 \left(\frac{x}{x^2+1}\right) dx$

c) $\int_0^1 \left(\frac{1}{3x-5}\right) dx$

d) $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}\right) dx$

e) $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4} dx$

f) $\int_2^7 \frac{1}{x} dx$

Exercice 3:

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (éventuellement commencer par simplifier l'écriture) :

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

c) $f(x) = e^{x^2-3}$

d) $f(x) = (2x^2 - 3)e^{3x}$

e) $f(x) = \sqrt{e^x}$

f) $f(x) = e^{\ln(x)}$

g) $f(x) = e^{3x} - e^{-x}$

h) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

i) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

j) $f(x) = x \cdot \ln(e^{x^2+1})$

k) $f(x) = e^x \cdot e^{x+1} \cdot e^{x-2}$

l) $f(x) = (e^x)^2$

Exercice 4:

Déterminer la valeur des intégrales suivantes : (réponse en valeur exacte)

a) $\int_{-1}^1 e^x dx$

b) $\int_0^1 e^{3x} dx$

c) $\int_0^{\ln(2)} \left((e^x + 1)^3 e^x \right) dx$

d) $\int_{-1}^1 (e^{2x} + 4e^x) dx$

e) $\int_2^3 5e^{2x+1} dx$

f) $\int_{-1}^2 3xe^{x^2-1} dx$

g) $\int_1^3 \frac{4e^{2x}}{e^{2x+3}} dx$

h) $\int_{-1}^2 \frac{3x}{e^{x^2-1}} dx$

i) $\int_0^e \frac{x}{x^2+1} dx$

➤ Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM p. 221 ex 6.8

Exercice 5: (Théorème de l'Hospital)

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} =$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 e^{-2x}) =$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x \cdot \ln(x)} =$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^3} =$

➤ Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM p. 129 ex 4.1

Exercice 6:

Soit la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

- Déterminer le domaine de définition et les zéros de f .
- Déterminer les asymptotes de f en ∞ et en $-\infty$.
- Déterminer si f admet une asymptote verticale. Justifier précisément cette réponse.

Exercice 7:

Soit la fonction $f(x) = \frac{\ln|x+1|}{x}$.

- Déterminer le domaine de définition et les zéros de f .
- Déterminer les asymptotes de f en ∞ et en $-\infty$.
- Déterminer si f admet une asymptote verticale. Justifier précisément cette réponse.

Exercice 8:

Soit la fonction $f(x) = \ln|x^2 + x|$.

- Déterminer le domaine de définition et les zéros de f .
- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer le domaine de définition et les zéros de f' .
- Elaborer le tableau des variations de f .
- Déterminer les éventuelles asymptotes verticales de f .
- Déterminer les éventuelles asymptotes affines de f .
- A partir des résultats obtenus, représenter la fonction f sur un repère orthonormé (taille 14 cm sur 14 cm, échelle 1 unité = 4 largeurs de carré).

Exercice 9:

Soit la fonction $f(x) = x^2 e^x$.

- Déterminer le domaine de définition et les zéros de f .
- Calculer les limites de f en $\pm \infty$.
- Calculer $f'(x)$ puis déterminer son domaine de définition ainsi que ses zéros.
- Elaborer le tableau des variations de f .
- Représenter f à partir des résultats obtenus sur un repère orthonormé (taille 14 cm sur 14 cm, échelle 1 unité = 2 largeurs de carré).

Solutions Analyse Série 6:

Exercice 1

a) $f'(x) = \frac{4}{4x-5}$

b) $f'(x) = \frac{-x}{3-x^2}$

c) $f'(x) = \frac{5}{x}$

d) $f'(x) = \frac{6x+3}{x^2+x-1}$

e) $f'(x) = \ln(x)$

f) $f'(x) = -\tan(x)$

g) $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

h) $f'(x) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$

i) $f'(x) = \frac{1}{x-3}$

j) $f'(x) = \ln(x) + 1$

k) $f'(x) = \frac{1}{x}$

l) $f'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$

m) $f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$

n) $f'(x) = \frac{7}{(2x-1)(3x+2)}$

Exercice 2

a) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ b) $\frac{\ln(5)}{2}$ c) $\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{2}{5}\right)$ d) $\ln(4)$ e) $\ln\left(\frac{9}{16}\right)$ f) $\ln\left(\frac{7}{2}\right)$

Exercice 3

a) $f'(x) = (x+1)e^x$ b) $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ c) $f'(x) = 2xe^{x^2-3}$

d) $f'(x) = (6x^2 + 4x - 9)e^{3x}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$ f) $f'(x) = 1$

g) $f'(x) = 3e^{3x} + e^{-x}$ h) $f'(x) = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$ i) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

j) $f'(x) = 3x^2 + 1$ k) $f'(x) = 3e^{3x-1}$ l) $f'(x) = 2e^{2x}$

Exercice 4

a) $\frac{e^2 - 1}{e}$ b) $\frac{e^3 - 1}{3}$ c) $\frac{65}{4}$ d) $\frac{1}{2}e^2 + 4e - \frac{1}{2}e^{-2} - 4e^{-1}$ e) $\frac{5}{2}(e^7 - e^5)$

f) $\frac{3}{2}(e^3 - 1)$ g) $\frac{8}{e^3}$ h) $-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{e^3} - 1\right)$ i) $\frac{1}{2}(\ln(e^2 + 1))$

Exercice 5

a) 1 b) 2 c) 1 d) 2 e) 0 f) $+\infty$ g) 0 h) 0

Exercice 6

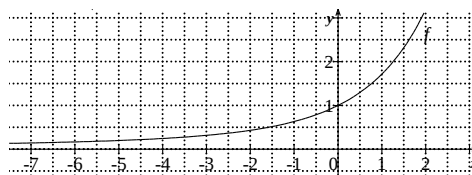
a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $Z_f = \emptyset$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \notin D_f$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0_+$ asymptote horizontale d'équation $y = 0$ pour $x \mapsto -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty \text{ la fonction } f \text{ diverge pour } x \mapsto \infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$ la fonction f n'admet pas d'asymptote verticale



(avec un trou en (0;1))

Exercice 7

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, $Z_f = \{-2\}$

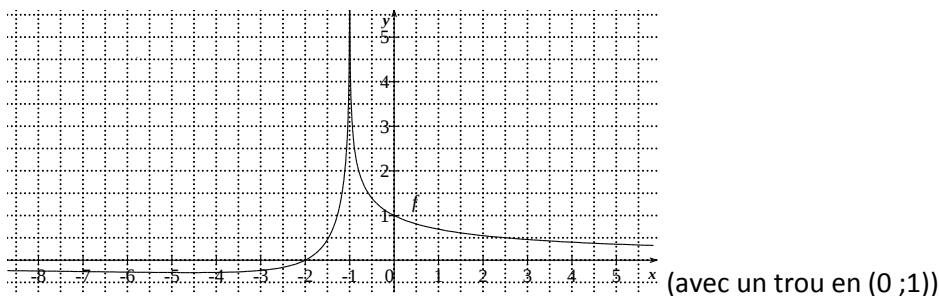
$$\frac{\ln|x+1|}{x} = 0 \Rightarrow \ln|x+1| = 0 \Rightarrow |x+1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ \text{ou} \\ -x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \notin D_f \\ \text{ou} \\ x=-2 \end{cases}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x+1|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\infty}{-\infty}}{\frac{-\infty}{1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0_-$ asymptote horizontale d'équation $y = 0$ pour $x \mapsto -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln|x+1|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\infty}{1}}{\frac{\infty}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0_+$ asymptote horizontale d'équation $y = 0$ pour $x \mapsto \infty$

c) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1_-} \frac{\ln|x+1|}{x} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1_+} \frac{\ln|x+1|}{x} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln|x+1|}{x} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x+1|}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$

la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$



Exercice 8

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, $Z_f = \left\{ \underbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}_{\approx -1,618}; \underbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\approx 0,618} \right\}$

$$\ln|x^2+x| = 0 \Rightarrow |x^2+x| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=1 \\ \text{ou} \\ -x^2-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ \text{ou} \\ \text{pas de solution} \end{cases}$$

b) $f'(x) = \frac{1}{x^2+x} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{x^2+x}$

c) $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, $Z_{f'} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

d)

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
Signe de $2x+1$	-		-	0	+		+
Signe de x^2+x	+		-	-	-		+
Signe de $f'(x)$	-		+	0	-		+
Variation de f	$\searrow$		$\nearrow$	Max.	$\searrow$		$\nearrow$

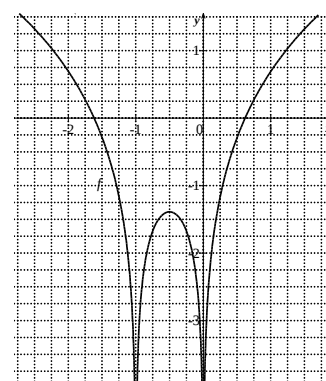
e) $\lim_{x \rightarrow -1_-} \ln|x^2+x| = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1_+} \ln|x^2+x| = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0_-} \ln|x^2+x| = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0_+} \ln|x^2+x| = -\infty$

la fonction f admet les asymptotes verticales d'équations $x = -1$ et $x = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x^2+x| = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x^2+x| = +\infty$

la fonction f diverge, elle n'admet pas d'asymptote affine.

g)



Exercice 9

a) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = \{0\}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^x = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$

c) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$ $D_{f'} = \mathbb{R}$, $Z_{f'} = \{-2; 0\}$

d)

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Signe de e^x	+	+	+	+	+
Signe de x^2+2x	+	0	-	0	+
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variation de f	$\nearrow$	Max.	$\searrow$	min.	$\nearrow$

e)

