Equations différentielles Série 2

Exercice 1 :

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes après en avoir séparé les variables.

1) $y + xy' = 0$
2) $y + 1 - (1 - x)y' = 0$
3) $x^2y' + y = a,$ $\quad avec\ a \in \mathbb{R}$
4) $(x^2 + 1)y' = 2xy$
5) $y'' = y'$ *(Faire un changement de variables)*
6) $y'y(x - 1) = x$ *(Utiliser l'intégration par parties, on suppose $x > 1$)*
7) $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$ *(Utiliser vos souvenirs de 3^e ou alors le formulaire)*

Exercice 2 :

1) Traduire en une équation différentielle l'énoncé suivant.

   Déterminer l'équation d'une courbe f telle qu'en chaque point M de f, la tangente à f soit perpendiculaire au segment OM.
   Rappel : deux droites sont perpendiculaires si le produit de pentes égale -1.

2) Résoudre cette équation.
3) Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3 :

Trouver la fonction f telle que $f(0) = -2$ et telle que la pente de la tangente à f (en chaque point) est égale à la seconde coordonnée du point de tangence augmenté de 3.

1) Traduire cet énoncé en une équation différentielle.
2) Résoudre cette équation.

Exercice 4 :

La tangente à f en a coupe l'axe horizontal en $\frac{a}{2}$.
Cette propriété est valable pour chaque point a.

1) Traduire cet énoncé en une équation différentielle
2) Résoudre cette équation.

Exercice 5 :

Trouver l'équation différentielle vérifiée par :

1) La fonction $y = ax^2 + bx + c$
2) La famille de cercles de rayon 5 dont les centres sont sur l'axe horizontal.
3) Toutes les droites, tangentes à la parabole d'équation $y^2 = 2x$

Exercice 6 :

Exprimer les phrases suivantes sous forme d'équations différentielles :

1) Le taux de décomposition du Radium est proportionnel à la quantité Q pas encore décomposée.

2) Pour une substance donnée, le taux d'accroissement instantané de la pression P de vapeur en fonction de la température T est proportionnel à P et inversement proportionnel au carré de T.

Exercice 7 :

Trouver l'équation différentielle correspondant au problème donné et résolvez la :

1) Une courbe passant par $(0; -2)$ est telle que la pente de la tangente en chaque point est égale à l'ordonnée correspondante augmentée de trois unités.

2) D'après la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque dans l'air est proportionnelle à la différence de températures entre le corps et le milieu ambiant.
   La température de l'air étant de 20°C, un corps se refroidit de 100°C à 60°C en l'espace de 20 minutes.
   Déterminer en combien de temps sa température tombera à 30°C.

3) On injecte une dose de substance médicamenteuse dans le sang à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures). On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.
   A l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 1,8 unités. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. On admet que le processus d'élimination peut se modéliser par l'équation différentielle : $Q'(t) = -\lambda Q(t)$, où λ est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

   (a) Prouvez que $Q(t) = 1{,}8\, e^{-\lambda t}$, puis calculer la valeur de λ, sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30%.

   (b) Au bout de combien de temps la quantité de substance présente dans le sang aura-t-elle été réduite de moitié ?

Exercice 8 :

Résolvez les équations différentielles ci-dessous :

1) $(1+y)dx-(1-x)dy=0$

2) $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}$

3) $\sin(x)\cos(y)\,dx-\cos(x)\sin(y)\,dy=0$

4) $y\,dx-(x^2a^2)dy=0$

5) $(1+x^2)dy=-2xydx$

6) $(1-x^2)dy+xydx=0$

Exercice 9 :

a) Résolvez l'équation différentielle $Y'+4Y=0$

b) Déduisez de a) les solutions de l'équation différentielle $y''+4y'=0$
en posant ... $=Y$

c) Déterminez alors la solution f qui vérifie $f'(0)=2$ et dont la représentation graphique admet une asymptote horizontale d'équation $y=3$ en $+\infty$.

Exercice 10 :

Dans une culture de bactéries, on suppose que le nombre x de bactéries à l'instant t est fonction du temps ; de plus, on suppose que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries présentes dans la culture. Au temps $t=0$, il y a x_0 bactéries dans la culture.

a) Ecrivez, puis résolvez l'équation différentielle vérifiée par la fonction x.
b) Si $t=4$, $x=1000$ et si $t=6$, $x=4000$. Calculez x_0 et la constante de proportionnalité.
c) Au bout de combien de temps, aura-t-on un million de bactéries ?

Exercice 11 :

Résoudre $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$
Donnez votre réponse tout forme implicite.

Solutions Equations différentielles Série 2

Exercice 1 :

1) $y = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$
2) $y = \frac{c}{1-x} - 1$, $c \in \mathbb{R}$
3) $y = ce^{\frac{1}{x}} + a$, $c \in \mathbb{R}$
4) $y = c(x^2 + 1)$, $c \in \mathbb{R}$
5) $y = c_1 e^x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
6) $y = \pm\sqrt{2\ln(|x-1|) + 2x + c} = \pm\sqrt{ln[(x-1)^2] + 2x + c}$, $c \in \mathbb{R}$
7) $y = \sin(x^2 + c)$, $c \in \mathbb{R}$

Exercice 2 :

$f'(x) \cdot \frac{f(x)}{x} = -1$ $\quad f(x) = \pm\sqrt{c - x^2}$ Il s'agit de l'équation du cercle de centre $(0;0)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

Exercice 3 :

$$f'(x) = f(x) + 3\,, \quad f(x) = e^x - 3$$

Exercice 4 :

$$f'(x) = \frac{f(x)2}{x} \qquad f(x) = cx^2 \ , \ c \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 :

1) $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow xy' = 2ax^2 + bx \Rightarrow \frac{1}{2}x^2y'' = \frac{1}{2}2ax^2$

   Donc $xy' - y - \frac{1}{2}x^2y'' = -c$ *équation différentielle linéaire, 2^e ordre, avec second membre, coefficients non constants*

2) $(x-a)^2 + y^2 = 25 \;\Rightarrow\; y^2((y')^2 + 1) = 25$
3) L'équation différentielle doit être vérifiée par les tangentes à la courbe $f(x) = \pm\sqrt{2x}$,

   ie : $y = \sqrt{2a} + \frac{1}{2\sqrt{2a}} \cdot 2(x-a) \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2a}}x + \frac{a}{\sqrt{2a}}$ $\quad d'où\ \ y' = \frac{1}{\sqrt{2a}}$

   $donc\ \ y = y'x + ay' \;\Rightarrow\; y = y'(x+a) \;\Rightarrow\; y - (x+a)y' = 0$

   équation différentielle d'ordre 1, linéaire, sans second membre et à coefficients non constants

Exercice 6 :

1) Quantité de radium : $Q(t)$. Taux de décomposition : $\frac{dQ}{dt} = Q'(t)$

   donc : $\frac{dQ}{dt} = kQ$, k *une constante arbitraire*.
2) $\frac{dP}{dT} = kP \cdot \frac{1}{T^2}$

Exercice 7 :

1) $y' = y + 3 \Rightarrow \frac{1}{y+3}\ dy = 1\ dx$

   solution : $y = e^x - 3$

Exercice 8 :

1) $y = \frac{k}{1-x} - 1, k \in \mathbb{R}^*$
2) $y = \frac{x+\tan(c)}{1-\mathrm{x}\tan(\mathrm{c})}$
3) $y = \arccos(sin(x) + k)$
4) $y = k\sqrt[2a]{\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}$

Exercice 9 :

a) $y = De^{-4x}$

b) $y = Pe^{-4\mathrm{x}} + \mathrm{c}$ avec $\mathrm{D}\left(-\frac{1}{4}\right) = P, \quad P \in \mathbb{R}_-^*$

Exercice 10 :

a) $\frac{dx}{dt} = kx, \qquad x = Ae^{kt}, A = e^c$

b) $k = \frac{\ln(4)}{2},\ x = Ae^{\frac{\ln(4)}{2}t},\ x_0 = A$

Exercice 11 :

$$\frac{e^y}{y} = xe^xA, A \in \mathbb{R}^*$$