

## Equations différentielles Série 3

---

### Exercice 1 :

Prouvez que les équations suivantes sont homogènes, puis résolvez-les :

1)  $x + y - xy' = 0$

4\*)  $(y - x)y' = y + x$

2)  $(x + y)dx + xdy = 0$

5\*)  $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$

3)  $x^2y' = y^2$

### Exercice 2\* :

- 1) Résolvez l'équation différentielle suivante en la transformant en équation homogène :

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$$

- 2) On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

- Prouver que la substitution utilisée auparavant ne marche pas.
- Montrer que l'on peut ramener cette équation à une équation à variables séparables en posant  $2x + y = z$
- Résolvez cette équation différentielle et donner votre réponse sous forme implicite.

### Exercice 3 :

Résolvez les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

1)  $y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$

6\*)  $y' - \frac{y}{n} = -\frac{x+1}{n(n+1)}$

2)  $y' + y = e^{-x}$

7\*)  $(1 + x^2y' + 2xy = 2x$

3)  $2y' - y = 6$

8\*)  $y' + 2xy = xe^{-x \cdot x}$

4)  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

9\*)  $y' - y = \cos(x) - \sin(x)$

5)  $y' - a \cdot \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $a \in \mathbb{N}^*$

### Exercice 4 :

Soit l'équation différentielle  $y' = 3y + e^{2x}$

Déterminer la solution qui contient le point (0; 4)

### Exercice 5 :

(un cas particulier d'équation différentielle linéaire d'ordre 1)

Il est possible de déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants  $y' + ay = b$  en lui appliquant la méthode de la séparation des variables.

Effectuer cette résolution puis comparer la solution obtenue avec celle donnée par la formule du cours.

---

### Exercice 6 :

On considère l'équation différentielle  $y' - xy = x$

- 1) C'est une équation linéaire, la résoudre en tant que telle.
- 2) Résoudre cette même équation par séparation des variables.
- 3) Comparer les deux résultats

---

### Exercice 7 :

Résoudre l'équation  $xy' = x - y$

On supposera ici que  $x$  est positif.

---

### Exercice 8 :

Lors de la désintégration d'un corps radioactif, la vitesse de désintégration à l'instant  $t$  est proportionnelle d'un facteur  $-k$  (où  $k$  est positif) à la masse de ce corps à l'instant  $t$ .

Soit  $m_0 = m(0)$  la masse initiale de ce corps.

- 1) Etablir l'équation différentielle et la résoudre. *Attention au signe du facteur  $k$  !*
- 2) On appelle période de l'élément radioactif le temps  $T$  au bout duquel la moitié de la masse du corps radioactif a été désintégrée.  
Pour le carbone 14, la constante de proportionnalité  $k \cong 1,2097 \cdot 10^{-4}$  quand  $t$  est évalué en années.  
Déterminer la période du carbone 14.
- 3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les être vivants mais, à la mort de ceux-ci, cette production cesse et le carbone 14 présent dans l'organisme se désintègre. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est de 70% de celle d'un fragment actuel de même masse, pris pour témoin.  
Calculer l'âge de ces fragments.

## Exercice 9 :

Résoudre les équations suivantes.

1)  $y' = 0$

2)  $y' + 2x = 0$

3)  $y' = \sin(x)\cos(x)$

4)  $y' = \frac{1}{1+x^2}$

5)  $y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

6)  $y' = \frac{x-1}{x+1}$

## Exercice 10 :

(Équations à variables séparables)

Résoudre les équations suivantes.

1)  $y' \sin(x) = y \cos(x)$

2)  $y^2 + (x+1)y' = 0$

3)  $xy' - ky = 0, k \in \mathbb{R}^*$

4)  $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

5)  $x^2y' + y = 3$

6)  $(x^2 - 4)y' = 2y$

7)  $yy' = x$

8)  $y' - xe^{-y} = 0$

9)  $x^2y' = \cos^2(y)$

10)  $y = \ln(y')$

## Exercice 11 : (Équations homogènes)

Résoudre les équations suivantes.

1)  $xy' = x - y$

2)  $xy^2y' = x^3 + y^3$

3)  $(3y+x) = (y+3x)y'$

4)  $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

## Exercice 12 : (Équations linéaires)

Résoudre les équations suivantes.

1)  $x^2y' + y = 1$

2)  $y' - x^3 = xy$

3)  $y' + 2y = 2x^2 - 4x + 5$

4)  $y' \sin(x) - y \cos(x) = \cot(x)$

5)  $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3$

6)  $xy' - ny = x^{n+1}e^x, n \in \mathbb{Z}^*$

7)  $(1-x^2)y' + 2xy = 1+x^2$

8)  $y' + y = x^2$

9)  $y' - ay = e^{bx}, a, b \in \mathbb{R}$

10)  $xy' - 2y = x^3e^x$

11)  $xy' - y = (x-1)e^x$

12)  $xy' - y = \ln(x)$

**Exercice 13 :** (Équations avec conditions initiales)

Résoudre les équations suivantes.

1)  $xy' - 2y = 2 - x$  et  $y(0,5) = 0$

2)  $2xy' + y = 1$  et  $y(1) = 2$

3)  $xy' + y = x \cos(x)$  et  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

4)  $y' = y + 3x + 2$  et  $y(0) = -3$

5)  $y' + y = e^{-x}$  et  $y(0) = 0$

6)  $xy' + 3y = -\frac{2}{x}$  et  $y(-1) = -3$

---

**Exercice 14 :**

Résoudre les équations suivantes.

1)  $\sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2}$

2)  $x^2 y' = xy + \frac{y^3}{x}$

3)  $x^2 y' - y + 4 = 0$

4)  $(1-x^2) y' + xy = 4x$

5)  $xy' - 2y = x^3$

6)  $(1+x) y' + y = 1 + \ln(x+1)$

7)  $x^2 y' = (x^2 - 4) \sqrt{1-y^2}$

8)  $y' + y \tan(x) = \cos^2(x)$

9)  $xy' + y = 2x$

10)  $y' = xy$

11)  $x^2 y' + y = x^2 + x$

12)  $y' + 2xy = 1 + 2x^2$

# Solutions Equations différentielles Série 3

---

## Exercice 1 :

1)  $y = x(\ln|x| + c)$

2)  $y = \frac{k}{x} - \frac{1}{2}x$

3)  $y = \frac{x}{1-kx}$

4)  $2xy + x^2 - y^2 = k$  et  $k \in \mathbb{R}$

5)  $y = ke^{-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}$

## Exercice 3 :

1)  $y = k|\cos(x)| + \sin(x)$  et  $k \in \mathbb{R}$

2)  $y = (k+x)e^{-x}$

3)  $y = ke^{\frac{1}{2}x} - 6$

4)  $y = k(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$

5)  $y' = k|x|^a + \frac{x}{-a+1} - \frac{1}{a}$

## Exercice 4 :

$$y = -e^{2x} + 5x^{3x}$$

## Exercice 6 :

$$y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$$

## Exercice 5 :

$$y(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

## Exercice 7 :

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}$$

## Exercice 8 :

1)  $m'(t) = -km(t)$

2)  $T = 5730$  ans

3) environ 2948 ans

## Exercice 9 :

1)  $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

2)  $y = \alpha - x^2, \alpha \in \mathbb{R}$

3)  $y = \frac{1}{2}\sin^2(x) + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

4)  $y = \arctan(x) + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

5)  $y = \sqrt{1+x^2} + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

6)  $y = x - \ln(x+1)^2 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

## Exercice 10

1)  $y = \alpha \sin(x), \alpha \in \mathbb{R}$

2)  $y = \frac{1}{\ln|\alpha(x+1)|}, \alpha \in \mathbb{R}$

3)  $y = \alpha x^k, \alpha \in \mathbb{R}$

4)  $y = \sin(x^2 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$

5)  $y = 3 + \alpha e^{\frac{1}{x}}, \alpha \in \mathbb{R}$

6)  $y = \alpha \sqrt{\left| \frac{x-2}{x+2} \right|}, \alpha \in \mathbb{R}$

7)  $y = \sqrt{x^2 + \alpha}$  ou  $y = -\sqrt{x^2 + \alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

8)  $y = \ln\left|\alpha + \frac{1}{2}x^2\right|, \alpha \in \mathbb{R}$

9)  $y = \arctan\left(\alpha - \frac{1}{x}\right), \alpha \in \mathbb{R}$

10)  $y = \ln\left(\frac{1}{|x-\alpha|}\right), \alpha \in \mathbb{R}$

### Exercice 11

1)  $y = \frac{x^2 + \alpha}{2x}$

2)  $y = x \cdot \sqrt[3]{\ln|\alpha x|^3}$

3)  $(y-x)^2 = \alpha(y+x)$  ou  $y = \pm x$

4)  $x^2 + y^2 - \alpha y = 0$  ou  $y = 0$

### Exercice 12

1)  $y = 1 + \alpha e^{\frac{1}{x}}, \alpha \in \mathbb{R}$

2)  $y = -x^2 - 2 + \alpha e^{\frac{x}{2}}, \alpha \in \mathbb{R}$

3)  $y = x^2 - 3x + 4 + \alpha e^{-2x}, \alpha \in \mathbb{R}$

4)  $y = \alpha \sin(x) - \frac{1}{2 \sin(x)}, \alpha \in \mathbb{R}$

5)  $y = (x + \alpha)(x + 1)^2, \alpha \in \mathbb{R}$

6)  $y = x^n (e^x + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$

7)  $y = x + \alpha(x^2 - 1), \alpha \in \mathbb{R}$

8)  $y = x^2 - 2x + 2 + \alpha e^{-x}, \alpha \in \mathbb{R}$

9) 
$$\begin{cases} y = (x + \alpha)e^{ax} & \text{si } a = b \\ y = \alpha e^{ax} + e^{bx}(b - a)^{-1} & \text{si } a \neq b \end{cases}$$
$$\alpha \in \mathbb{R}$$

10)  $y = x^2(e^x + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$

11)  $y = \alpha x + e^x, \alpha \in \mathbb{R}$

12)  $y = \alpha x - \ln(x) - 1, \alpha \in \mathbb{R}$

### Exercice 13

1)  $y = 2x^2 + x - 1$

2)  $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3)  $y = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{x}$

4)  $y = 2e^x - 3x - 5$

5)  $y = x e^{-x}$

6)  $y = \frac{4 - x^2}{x^3}$

### Exercice 14

1)  $y = x \cos(\alpha) + \sqrt{1 - x^2} \sin(\alpha),$   
 $\alpha \in \mathbb{R}$

2)  $y = x \sqrt{\frac{-1}{\ln(\alpha^2 x^2)}}, \alpha \in \mathbb{R}$

3)  $y = \alpha e^{-\frac{1}{x}} + 4, \alpha \in \mathbb{R}$

4)  $y = \alpha \sqrt{|1 - x^2|} + 4, \alpha \in \mathbb{R}$

5)  $y = x^3 + \alpha x^2, \alpha \in \mathbb{R}$

6)  $y = \ln(x+1) + \frac{\alpha}{x+1}, \alpha \in \mathbb{R}$

7)  $y = \sin\left(x + \frac{4}{x} + \alpha\right), \alpha \in \mathbb{R}$

8)  $y = \cos(x)(\alpha + \sin(x)), \alpha \in \mathbb{R}$

9)  $y = x + \frac{\alpha}{x}, \alpha \in \mathbb{R}$

10)  $y = \alpha e^{\frac{x}{2}}, \alpha \in \mathbb{R}$

11)  $y = x + \alpha e^{\frac{1}{x}}, \alpha \in \mathbb{R}$

12)  $y = x + \alpha e^{-x^2}, \alpha \in \mathbb{R}$