Nombres complexes Série 1 :

Exercice 1 :

Considérons : $z_1 = 7 - 5i, z_2 = 2 + i\,, z_3 = -5 + 2i\,, z_4 = -10 - 3i\,, z_5 = 8\,, z_6 = 8i$

Calculer :

1) $z_1 - z_3 - z_5$
2) $z_2 + (z_3 - z_4)$
3) $z_5 - (z_6 - z_1)$
4) $z_1 z_3 z_4$
5) $z_1^2 + z_2^2$
6) $z_3^2 + z_4^2$
7) $z_2(z_4 - z_6)$
8) $iz_4 - z_3 z_6$
9) $Re(z_1 + 4z_2)$
10) $Re(z_1^2 z_3)$
11) $Im(2z_2 - 3z_3)$
12) $Im(z_2^2 z_4)$

Exercice 2 :

Effectuer les opérations suivantes.
A l'exception du point 8), il ne s'agit pas de calcul littéral mais de calcul numérique !

1) $(4 + 2i) + (4 - i) =$
2) $(5 + 10i) + (5 - 10i) =$
3) $(8 + 2i)(8 - 2i) =$
4) $(3 + 2i)^2 =$
5) $(1 + i)^2 =$
6) $(1 + i)^3 =$
7) $(1 + i)^4 =$
8) $(a + ib)(a - ib) =$

Exercice 3 :

1) Vérifier que l'inverse de $z = 2 + 3i$ est $z^{-1} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$
   Il s'agit donc de montrer que $z \cdot z^{-1} = 1$
2) Déterminer la forme cartésienne de l'inverse de $2 + 7i$.
3) Déterminer la formule donnant l'inverse d'un complexe non nul : $z = a + ib$
   Partir de $(a + ib)(x + iy) = 1$ *puis exprimer* x *et* y *en fonction de* a *et* b

Exercice 4 :

Calculer les quotients ci-dessous et donner le résultat sous forme cartésienne.
(Utiliser les résultats de l'exercice précédent

1) $\frac{1+4i}{2+3i} =$
2) $\frac{3-4i}{4+3i} =$

Exercice 5 :

$\boxed{\text{Le conjugué de } z = a + ib \text{ est } \bar{z} = a - ib}$

Démontrer que :

1) $z + \bar{z} = 2Re(z)$
2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
3) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Solutions NCS1

Exercice 1 :

1) $4-7i$
2) $7+6i$
3) $15-13i$
4) $367-315i$
5) $27-66i$
6) $112+40i$
7) $-9-32i$
8) $19+30i$
9) 15
10) 20
11) -4
12) -49

Exercice 2 :

1) $8+i$
2) 10
3) 68
4) $5+12i$
5) $2i$
6) $-2+2i$
7) -4
8) a^2+b^2 une nouvelle identité !

Exercice 3 :

1) $z\cdot z^{-1} = (2+3i)\cdot\left(\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i\right) = \frac{4}{13}-\frac{6}{13}i+\frac{6}{13}i-\frac{9i^2}{13} = \frac{4}{13}+\frac{9}{13} = 1$

2) $\frac{1}{2+7i} = \frac{2}{53}-\frac{7i}{53}$

3) $(a+ib)(x+iy) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ax-by+(ay+bx)i = 1+0i$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

L'inverse de $z = a+ib$ est donc $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}$

Exercice 4 :

1) $\frac{1+4i}{2+3i} = (1+4i)\left(\frac{2}{13}-\frac{3i}{13}\right) = \frac{14}{13}+\frac{5}{13}i$

2) $\frac{3-4i}{4+3i} = (3-4i)\left(\frac{4}{25}-\frac{3i}{25}\right) = -i$