Nombres complexes Série 2

Exercice 1 :

a) Calculez : $-z, \bar{z}\ et\ z^{-1}$ pour :

1) $z = 12 - 5i$ 2) $z = 3 + i$ 3) $z = \frac{5}{3}i$ 4) $z = -3/2$

b) Calculez :

1) $\frac{5+3i}{2+4i}$ 2) $\frac{63+16i}{4+3i}$ 3) $\frac{56+33i}{12-5i}$ 4) $\frac{13-5i}{1-i}$

c) On considère : $z_1 = 1 + 2i$ $z_2 = -3$ $z_3 = 5 + 5i$ $z_4 = -8 - 6i$

Calculez : 1) $\frac{z_1 z_2}{z_3}$ 2) $\frac{z_1+z_2}{2z_4}$ 3) $\frac{z_3-\overline{z_3}}{z_1 z_1}$ 4) $\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$ 5) $\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_3}{z_4}$ 6) $z_3 z_4 + \frac{500i}{z_3 z_4}$

d) On considère : $z_1 = 5 + 2i$ $z_2 = -3 + 5i$

Calculez : 1) $Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ 2) $\frac{Re(z_1)}{Re(z_2)}$ 3) $\frac{Im(z_2)}{Im(z_1)+Re(z_1)}$

Exercice 2 :

On considère : $z_1 = \frac{a+bm-(am-b)i}{1-mi}$ et $z_2 = \frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi}$

Calculer : 1) $Re(z_1)$ 2) $Im(z_1)$ 3) $Re(z_2)$ 4) $Im(z_2)$

Exercice 3 :

a) Calculer le module de :

1) $3 - 4i$ 2) $\sqrt{3} + i$ 3) $1 + i$ 4) $-1 - i$

b) Simplifier les expressions :

1) $Re(8i\bar{z}) + |z - 3i|^2 - |z + 1|^2$

2) $|z + 0{,}5|^2 + i\left|z + \frac{i}{2}\right|^2 - (1 + i)|z|^2 - 0{,}25(1 + i)$

c) Démontrer : $|z|^2 = 2Re^2(z) - Re(z^2)$

Exercice 4 :

a) On considère : $z_1 = 43 - 11i$ $\quad z_2 = 8 - i$ $\quad z_3 = 2 + 3i$ $\quad z_4 = 5 - 3i$

Calculer, de deux manières différentes, le conjugué de :

1) $z_1 z_2$
2) $z_1 - z_2$
3) $(z_3 + z_4)z_1$
4) $\frac{z_2 z_4}{z_3}$
5) $(z_1 + z_2)^2$
6) $\frac{z_1+z_2}{z_3-z_4}$

b) Simplifier les expressions suivantes : $(a, b \in \mathbb{C})$

1) $\overline{a + \overline{b}} - (\bar{a} + b)$ $\quad$ 2) $\overline{\overline{a}\, b} \cdot \overline{\left(\frac{\bar{a}}{b}\right)}$ $\quad$ 3) $\overline{(a\,\overline{b})^3} \cdot \overline{\left(\frac{b}{a}\right)^3}$

c) Démontrer que :

1) $Re(\bar{z}_1 z_2) = Re(z_1 \bar{z}_2)$ $\quad$ 2) $Im(\bar{z}_1 z_2) = -Im(z_1 \bar{z}_2)$

Exercice 5 :

a) Calculer : $(a + bi)(a - bi)$

b) Calculer : $(a + bi)(c + di)$

c) Transformer $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ en une somme de deux carrés.

d) Utiliser c) pour transformer en une somme de deux carrés : 1) $5 \cdot 29$ 2) $5 \cdot 13 \cdot 29$

Exercice 6 : Calculer le module des nombres suivants :

1) $(3 + 2i)^2$ $\quad$ 2) $\frac{7}{(2-i)^2}$ $\quad$ 3) $\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}$

Exercice 7 : Démontrer les propriétés du module ci-dessous.

1) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *Indic. : utiliser la propriété démontrée au point précédent.*

3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Exercice 8 :

Calculer l'inverse des complexes suivants. *(Réponse attendue sous forme cartésienne)*

1) $3 - 2i$ $\quad$ 2) $\frac{1+2i}{i-3}$

Exercice 9 : Résoudre les équations suivantes

1) $3(z - 2) = 5$
2) $3(z - 2) = 5i$
3) $3i(z - 2) = 5$
4) $(2 + i)(z - 2) = z$
5) $\frac{z+2}{z-i} = 5 + 3i$ *Cette équation n'est pas de degré 1 mais s'y ramène en une étape.*

Solutions NCS2

Exercice 1 :

a)

	$-z$	$\bar{z}$	z^{-1}
1)	$-12+5i$	$12+5i$	$\frac{1}{169}(12+5i)$
2)	$-3-i$	$3-i$	$\frac{1}{10}(3-i)$
3)	$-\frac{5}{3}i$	$-\frac{5}{3}i$	$-\frac{3}{5}i$
4)	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}$

b)

1) $\frac{1}{10}(11-7i)$ 2) $12-5i$ 3) $3+4i$ 4) $9+4i$

c)

1) $\frac{1}{10}(-9-3i)$ 2) $\frac{1}{50}(1-7i)$ 3) $\frac{1}{5}(8-6i)$ 4) $\frac{1}{6}(1+3i)$
5) $\frac{1}{10}(1+13i)$ 6) $-17-71i$

d) 1) $-\frac{5}{34}$ 2) $-\frac{5}{3}$ 3) $\frac{5}{7}$

Exercice 2 :

1) a 2) b 3) $\frac{2a^2-2b^2}{a^2+b^2}$ 4) 0

Exercice 3 :

a) 1) 5 2) 2 3) $\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{2}$ b) 1) 8 2) z

Exercice 4 :

a)

1) $333+131i$
2) $35+10i$
3) $301+77i$
4) $-1+13i$
5) $2457+1224i$
6) $-5+6i$

b) 1) 0 2) a^2 3) $|b|^6$

Exercice 5 :

a) a^2+b^2 b) $ac-bd+(ad+bc)i$ c) $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$

d) 1) $5\cdot 29 = 1^2+12^2 = 8^2+9^2$ 2) $5\cdot 13\cdot 29 = 21^2+38^2 = 27^2+34^2 = 11^2+42^2$

Exercice 6 :

1) 13 2) $\frac{7}{5}$ 3) 1 car $\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i} = -i$

Exercice 7 :

1) $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

2) $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{z_1 z_2 (\overline{z_1 z_2})} = \sqrt{z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{\underbrace{|z_1|^2}_{\in \mathbb{R}_+} \underbrace{|z_2|^2}_{\in \mathbb{R}_+}} = \sqrt{|z_1|^2}\sqrt{|z_2|^2} = |z_1||z_2|$

Il est possible de démontrer c résultat via d'autres méthodes.

3) $\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \left|\frac{a-ib}{|z|^2}\right| = \left|\frac{a}{|z|^2} - i\frac{b}{|z|^2}\right| = \sqrt{\frac{1}{|z|^4}(a^2+b^2)} = \frac{1}{|z|^2} \cdot |z| = \frac{1}{|z|}$

Exercice 8 :

1) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$
2) $-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

Exercice 9 :

1) $S = \left\{\frac{11}{3}\right\}$ *une équation à coefficients réels a une solution réelle*
2) $S = \left\{2 + \frac{5}{3}i\right\}$
3) $S = \left\{2 - \frac{5}{3}i\right\}$
4) $S = \{3 - i\}$
5) $S = \left\{\frac{11}{25} + \frac{23}{25}i\right\}$