Nombres Complexes Série 4

Exercice 1 :

Il est évident que toute équation de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$ se ramène à $x^3 + a'x^2 + b'x + c' = 0$ en divisant chaque membre par le réel non nul a.

En partant de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$:

1) Substituer x par $y + \alpha$ puis réduire l'expression obtenue,
2) Montrer qu'en choisissant $\alpha = -\frac{a}{3}$, le terme de degré 2 est nul,
3) Ecrire l'équation sous la forme $y^3 = py + q$ (Exprimer p et q en fonction de a, b et c)

Exercice 2 :

Ecrire l'équation : $x^3 + 3x^2 - 5x + 4 = 0$ sous la forme $x^3 = px + q$

Exercice 3 :

Montrer que les solutions du système

$$\begin{cases} 3ab = p \\ a^3 + b^3 = q \end{cases} \quad sont :$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad et \; b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Exercice 4 :

1) Appliquer la formule de Tartaglia-Cardan :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

à l'équation $x^3 = 6x + 40$

2) Calculer le développement de $\left(2 \pm \sqrt{2}\right)^3$ puis réduire la solution trouvée au point précédent.
3) Montrer que notre équation se ramène à : $(x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0$ puis calculer ses deux autres solutions de l'équation.

Exercice 5 :

Résoudre l'équation : $x^3 = 15x + 4$

Indication : calculer : $(2 \pm i)^3$

Solutions NCS4

Exercice 1 :

1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (y+\alpha)^3 + a(y+\alpha)^2 + b(y+\alpha) + c = 0$

$\Leftrightarrow y^3 + 3y^2\alpha + 3y\alpha^2 + \alpha^3 + ay^2 + 2a\alpha y + a\alpha^2 + by + b\alpha + c = 0$

$\Leftrightarrow y^3 + y^2(3\alpha + a) + y(3\alpha^2 + 2a\alpha + b) + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$

2) Pour que le terme de degré 2 soit nul, il faut que $3\alpha + a = 0$ donc que $\alpha = -\frac{a}{3}$.

3) Si $\alpha = -\frac{a}{3}$, nous obtenons : $y^3 + y(-\frac{a^2}{3} + b) + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$

Finalement, $p = \frac{a^2}{3} - b$ et $q = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27} - c$

Exercice 2 :

$$x^3 = 8x - 11$$

Exercice 3 :

De la première équation, on tire : $a = \frac{p}{3b}$.

En substituant dans la seconde, on obtient : $\left(\frac{p}{3b}\right)^3 + b^3 = q$

En multipliant par b^3 : $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + b^6 = qb^3$ puis $b^6 - qb^3 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$.

Cette dernière équation est bicarrée.

$$b^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 - 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}{4}} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Comme $a^3 = q - b^3$, on obtient : $a^3 = \frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ *(attention aux signes !)*

Exercice 4 :

Les réponses se trouvent dans le cours à la page 12

Exercice 5 :

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = (2+i) + (2-i) = 4$$

Les deux autres solutions sont :

$$x = -2 \pm \sqrt{3}$$