Nombres complexes Série 5

Exercice 1 :

a) Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique
(avec un argument compris entre 0 *et* 2π*)*

1) $1-i$ *2)* $\sqrt{3}-i$ *3)* $7i$ *4)* -2 *5)* $-4+4i$ *6)* $2\sqrt{3}-2i$

b) Mettez les nombres complexes suivants sous forme algébrique, puis représentez-les :
1) $6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)i\right)$ *2)* $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)i\right)$

Exercice 2 :

1) Démontrer que $Arg\left(\frac{1}{z}\right)=-Arg(z)$ Indication : considérer $Arg\left(z\cdot\frac{1}{z}\right)$
2) Déduire du point précédent que $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg(z_1)-Arg(z_2)$
3) Démontrer par récurrence que $Arg(z^n)=nArg(z)$

Exercice 3 :

Ecrire les nombres suivants sous forme cartésienne,
1) $e^{i3\pi}$ 2) $e^{-i\pi}$ 3) $e^{-i\pi/2}$ 4) $e^{i\pi/4}$ 5) $e^{i\pi/3}$ 6) $e^{-i3\pi/4}$

Exercice 4 :

Ecrire i sous forme exponentielle puis calculer i^i

Exercice 5 :

$$z=1-2i \quad et \quad w=2-i$$

1) Trouver la forme cartésienne, trigonométrique et exponentielle de $\frac{zw}{z-w}$
2) Calculer la forme cartésienne de $\left(\frac{zw}{z-w}\right)^4$

Exercice 6 :

Prouver que :

1) Si $z=re^{ix}$ $alors$ $\bar{z}=re^{-ix}$
2) $e^{2ik\pi}=1$

Exercice 7 :

Ecrivez sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1) $2+i$ 2) $-3-4i$ 3) $1-2i$ 4) $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

Exercice 8 :

Soit $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

a) Calculer le module et l'argument de z, puis calculer z^3 et enfin z^{2017}
b) Prouver que $1 + z + z^2 = 0$

Exercice 9 :

Mettez sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+i}$ b) $z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{11}$

Exercice 10 :

Calculer pour quelle(s) valeur(s) de n le nombre complexe $(1+i)^n$ est réel.

Exercice 11 :

Mettez les nombres complexes suivants sous forme algébrique, puis représentez-les.

a) e^{-2i} b) $5e^{-i\pi}$ c) $4e^{3i\pi/4}$ d) $4e^{-i}$

Exercice 12 : En utilisant la formule de Moivre, exprimer :

a) $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ b) $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ c) $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$

en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Exercice 13 :

Linéariser les fonctions trigonométriques suivantes :

a) $sin^3(x)$ b) $cos^5(x)$ c) $sin^6(x)$
d) $cos^2(x)sin^2(x)$

Exercice 14 :

Calculer

a) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$ b) $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

Exercice 15 :

Prouver que :

$$\frac{\sin(4x)}{\sin(x)} = 8\,cos^3(x) - 4\cos(x) = 2\cos(3x) + 6\cos(x) - 4$$

Exercice 16 :

Résoudre l'équation : $(z-1)^3 = 8$ puis donner les solutions sous forme cartésiennes.
Indication : écrire 8 sous forme exponentielle puis calculer $z - 1$.

Solutions NCS5 :

Exercice 1 :

a) 1) $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ 2) $2(\cos(\pi\ )+isin(\pi))$ 3) $7isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

4) $2\cos(\pi)$ 5) $4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 6) $4\left(\cos(11\pi 6)+isin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$

b) 1) $z=-3-3\sqrt{3}i$ 2) $z=-2+2i$

Exercice 2 :

1) $0=Arg(1)=Arg\left(z\cdot\frac{1}{z}\right)=Arg(z)+Arg\left(\frac{1}{z}\right)$ *donc ...*
2) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg\left(z_1\cdot\frac{1}{z_2}\right)=Arg(z_1)+Arg\left(\frac{1}{z_2}\right)=Arg(z_1)-ARG(Z_2)$
3) *L'égalité* $Arg(z^n)=nArg(z)$ *est vraie lorsque* $n=1$.
   Montrons que si l'égalité est vraie pour un entier n*, alors elle l'est aussi pour* $n+1$.
   $$\begin{aligned}Arg(z^{n+1})=Arg(z^n z)=Arg(z^n)+Arg(z)&=nArg(z)+Arg(z)\\&=(n+1)Arg(z)\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) $e^{i3\pi}=-1$
2) $e^{-i\pi}=-1$
3) $e^{-i\pi/2}=-i$
4) $e^{i\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
5) $e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
6) $e^{-i3\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4 :

$$i=e^{i\pi/2}\ \ donc\ i^i=\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i=e^{-\pi/2}\cong 0{,}21$$

Exercice 5 :

1) $\frac{zw}{z-w}=\frac{5}{2}+i\frac{5}{2}=\sqrt{2}\frac{5}{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}\frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $\left(\frac{zw}{z-w}\right)^4=-\frac{625}{4}$

Exercice 7 :

1) $\sqrt{5}e^{i0{,}46}$ 2) $5e^{4{,}068i}$ 3) $\sqrt{5}e^{-1{,}107i}$ 4) $4e^{\frac{\pi}{4}i}$

Exercice 8 :

1) Module : 1, Argument : $\frac{2\pi}{3}$, $z^3 = 1$,

$z^{2017} = (z^3)^{672} \cdot z = 1 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)i$

2) $1 + z + z^2 = \frac{z^3-1}{z-1} = \frac{0}{z-1} = 0$

Exercice 9 :

1) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)i$

2) $z = \left(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}\right)^{11} = 2^5\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}\cdot 11i} = 2^5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)i\right)$

Exercice 10 :

$$Im((1+i)^n) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) = 0 \ \Leftrightarrow n = k\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 4k\ , k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 11 :

$$z = a + bi, \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \ \ et\, \frac{b}{a} = \tan(\theta)$$

1) $z = -0{,}42 - 0{,}91i$
2) $z = -5$
3) $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$
4) $z = 2{,}16 - 3{,}37i$

Exercice 12 :

1) $\cos(3x) = \cos(x)\,(4cos^2(x) - 3) \quad et\, \sin(3x) = \sin(x)\left(3 - 4sin^2(x)\right)$
2) $\cos(4x) = 8cos^4(x) - 6cos^3(x) - 2cos^2(x) + 1$
3) $\cos(5x) = \cos(x)\,(16cos^4(x) - 20cos^2(x) + 5)$
   $et\ \sin(5x) = \sin(x)(5 - 20sin^2(x) + 7sin^4(x)$

Exercice 13 :

a) $\frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$

b) $\frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$

c) $-\frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) - \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}$

d) $\frac{sin^2(2x)}{4} = \frac{1-\cos(4x)}{8}$

Exercice 14 :

a) $2^{10}e^{\frac{2\pi i}{3}}$

Exercice 16 :

$(z-1)^3 = 8 \cdot e^{i2k\pi}$

$z - 1 = \left(8 \cdot e^{i2k\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} \cdot e^{\frac{i2k\pi}{3}} = 2 \cdot e^{\frac{i2k\pi}{3}}$ $\qquad$ $k = 0 ; 1 ; 2.$

$z = 1 + 2 \cdot e^{\frac{i2k\pi}{3}}$ $\qquad$ $k = 0 ; 1 ; 2.$

$z_1 = 3 \qquad z_2 = i\sqrt{3} \qquad z_3 = -i\sqrt{3}$