Nombres complexes Série 6

Exercice 1 :

Résoudre les équations :

1. $(2-i)(z+2-i)=(3+2i)(z+i)$
2. $(1+i)z^2-(1+i)z-4+2i=0$
3. $z^3+3(1-i)z^2-(2+9i)z-6=0$ et $z=i$ est une solution

Exercice 2 :

Résoudre les équations :

1. $z^2-(2+3i)z-(5-i)=0$
2. $\frac{z-i}{z+i}=i$
3. $\frac{z-i}{z+i}=z$
4. $z^2=2i$
5. $z^3=-1+i$
6. $z^5=16\sqrt{2}(-1-i)$
7. $x^3-(1+i)x^2+(2+i)x-2=0$ (où $2i$ est une solution)
8. $x^4+3x^3+2x^2-2x-4=0$ (où $-1+i$ est une solution)

Exercice 3 :

Cherchez et représentez graphiquement les nombres complexes vérifiant :

a) $z^6=1$

b) $z^7=1$

Exercice 4 :

Cherchez toutes les racines cinquièmes de -1.

Exercice 5 :

Déterminez, puis représentez les racines suivantes :

a) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i}$

b) $\sqrt{-4+4i}$

Exercice 6 :

1. Calculer (par factorisation) les trois solutions de l'équation $z^3=8$
2. Calculer le module de chacune de ces solutions. Le résultat est-il une surprise ?
3. Placer ces trois solutions dans le plan complexe.
4. Quels doivent être les arguments de ces nombres sachant que leur cube est égal à 8 ?

   Utiliser l'interprétation géométrique de la multiplication et le fait que $2=2+0i$.

Exercice 7 :

1. Représenter $z = 4 + 3i$ dans le plan complexe.
2. Construire ensuite les deux racines carrées de z (même approximativement) sachant que $\sqrt{5} \cong 2{,}2$.
3. Sur la base de cet exemple, expliquer pourquoi chaque complexe non nul possède deux racines carrées opposées.

Exercice 8 :

1. Déterminer le module et un argument de $(1 + i)^{10}$
2. Pour quelles valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$) le nombre $(1 + i)^n$ est-il réel ?
3. Ecrire $(1 + i)^7$ sous la forme cartésienne.

Exercice 9 :

Le but de cet exercice est de trouver une racine cubique de $2 + 11i$ en s'aidant de l'interprétation géométrique de la multiplication.
Cette racine intervient dans la résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$

1) Calculer le module et un argument de $2 + 11i$.
2) Calculer le module et un argument d'une racine cubique de $2 + 11i$.
3) Calculer les parties réelles et imaginaires de cette racine cubique. (sans trop arrondir l'argument)
4) Déduire une racine cubique de $2 - 11i$.

Exercice 10 :

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad z_2 = 1 + i$$

1) Calculer le module et un argument de chacun de ces complexes.
2) Déduire des réponses précédentes le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
3) Calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 11 :

A l'aide de la formule de De Moivre, résoudre l'équation $z^5 = 1$.
Représenter les solutions dans le plan complexe.

Exercice 12 :

Calculer les racines 5^{ièmes} de $4 + 4i$ puis représenter les résultats dans le plan complexe.

Solutions NCS6

Exercice 1 :

1. $S = \left\{-\frac{8+11i}{5}\right\}$
2. $S = \{2 - i; -1 + i\}$
3. $S = \{-3; i; 2i\}$

Exercice 2 :

1. $s = \{-1 + i; 3 + 2i\}$
2. $S = \{-1\}$
3. $S = \left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$
4. $S = \{-1 - i; 1 + i\}$
5. $S = \left\{\sqrt[6]{2}e^{\frac{i\pi}{4}}; \sqrt[6]{2}e^{\frac{i4\pi}{12}}; \sqrt[6]{2}e^{\frac{i15\pi}{12}}\right\}$
6. $S = \left\{2e^{\frac{i\left(\frac{3\pi}{4}+k2\pi\right)}{5}}; k = 0,1,2,3,4\right\}$

Exercice 3 :

a) $S = \left\{1; e^{\frac{\pi}{3}i}; e^{\frac{2\pi}{3}i};\ e^{\pi i}, e^{\frac{4\pi}{3}i}; e^{\frac{5\pi}{3}i}\right\}$

b) $S = \left\{1; e^{\frac{2\pi}{7}i};\ e^{\frac{4\pi}{7}i};\ e^{\frac{6\pi}{7}i}; e^{\frac{8\pi}{7}i};\ e^{\frac{10\pi}{7}i};\ e^{\frac{12\pi}{7}i}\right\}$

Exercice 4 :

$S = \left\{e^{\frac{\pi}{5}i};\ e^{\frac{\pi 3}{5}i};\ e^{\pi i};\ e^{7\frac{\pi}{5}i};\ e^{\frac{9\pi}{5}i}\right\}$

Exercice 5 :

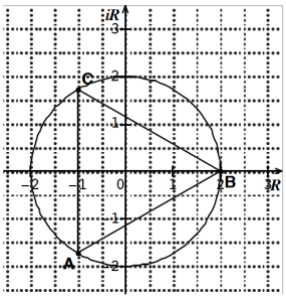
1. $\sqrt[4]{4}e^{\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)i}, k = 0,1,2,3$
2. $2\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i}$ $\quad et\ 2\sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i}$

Exercice 6 :

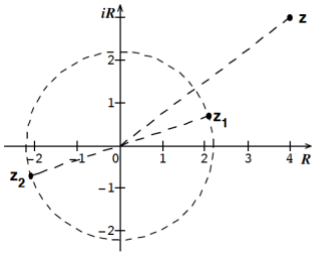
1. $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$

Les solutions sont $z_1 = 2, z_2 = -1 + i\sqrt{3}, z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

2. Les trois nombres sont de module 2.
3. $Arg(z_1) = 0, Arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}, Arg(z_2) = \frac{4\pi}{3}$
4. Il faut que $3\alpha = k2\pi$ donc $\alpha = \frac{k2\pi}{3}$



Exercice 7 :



Le module de z est 5. Le module des racines est donc de $\sqrt{5} \cong 2{,}2$.

On trouve les racines en prenant la moitié de l'argument de z. (à $k\pi$ près)

Exercice 8

1) Le module de $1+i$ est $\sqrt{2}$. Celui de $(1+i)^{10}$ est donc de $\sqrt{2}^{10} = 32$.
2) $n = 4k$ où $k \in \mathbb{N}$ car un argument de $1+i$ est $\pi/4$.
3) $(1+i)^7 = 8 - 8i$

Exercice 9

1) Module : $\sqrt{125}$ argument : $\text{Arctg}(\frac{11}{2}) = 79{,}7°$
2) Module : $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{5}$ argument : $26{,}57°$
3) Partie réelle : $\sqrt{5} \cdot \cos(26{,}57°) = 2$ Partie imaginaire : $\sqrt{5} \cdot \sin(26{,}57°) = 1$
   Une des racines cubiques de $2 + 11i$ est donc $2 + i$.
4) $2 - i$

Exercice 10

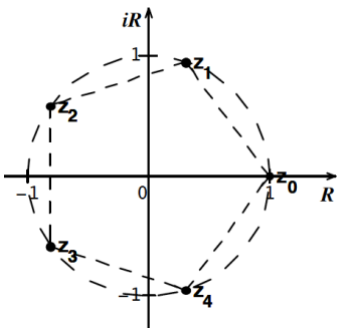
1) $|z_1| = 2$ $|z_2| = \sqrt{2}$ $\text{Arg}(z_1) = \dfrac{2\pi}{3}$ $\text{Arg}(z_2) = \dfrac{\pi}{4}$
2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ $\text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$
3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3} - 1 + i(1+\sqrt{3})}{2}$ $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

   $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

Exercice 11

$z = \cos(\frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{2k\pi}{5})$

$k = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.$



Exercice 12

$z = \sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}))$ $k = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.$