

## Algèbre linéaire Série 2

---

**Exercice 1 :** Calculer les déterminants suivants :

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$d = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & z \end{vmatrix}$$


---

**Exercice 2 :** Calculer les déterminants suivants :

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$


---

**Exercice 3 :** Calculer les déterminants suivants :

$$a = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \alpha & \beta - x \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$$


---

**Exercice 4 :**

On donne les matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

1. Calculer : a)  $Det(A)$    b)  $Det(B)$    c)  $Det(A+B)$                       2. Que peut-on en déduire ?
- 

**Exercice 5 :**

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

c)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

d)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Que constate-t-on ?

---

**Exercice 6 :**

$$\text{Soit } k \in \mathbb{R} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Montrer que :

a)  $Det(AB) = Det(A)Det(B)$

c)  $Det(A^T) = Det(A)$

b)  $Det(kA) = k^2 Det(A)$

d)  $Det(I) = 1$

---

**Exercice 7 :**

a) Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix}$ , déterminer les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $Det(A) = 0$

b) Soit la matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ , déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle  $Det(B) = 0$

**Exercice 8 :**

Vérifier les égalités suivantes sans calculer les déterminants.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 6 \\ 7 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

**Exercice 9 :** Exprimer les déterminants suivant en fonction de  $p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$s = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$t = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix},$$

$$u = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$v = \begin{vmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \end{vmatrix},$$

$$w = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_2 + 2a_1 & 3b_2 + 2b_1 & 3c_2 + 2c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

**Exercice 10 :** Calculer et factoriser en utilisant les propriétés des déterminants.

$$a = \begin{vmatrix} 1 & \beta + \gamma & \alpha \\ 1 & \gamma + \alpha & \beta \\ 1 & \alpha + \beta & \gamma \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} x & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix}, d = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

**Exercice 11 :** Résoudre (par rapport à  $x$ ) en utilisant les propriétés des déterminants.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & a & 1 \\ a & x & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**Exercice 12 :** Calculer les déterminants suivants.

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix},$$

$$b = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

$$c = \begin{vmatrix} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & r & s \end{vmatrix}$$

**Exercice 13 :** Démontrer les identités suivantes

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Cette propriété peut être généralisée à l'ordre  $n$  (déterminant de Vandermonde)

## Solutions ALS2 :

---

**Ex 1 :**  $a = 8, b = 11, c = -2, d = xz$

**Ex 2 :**  $a = 79, b = 24, c = -12$

**Ex 3 :**  $a = x^2 - (\alpha + \beta)x, b = \lambda^2 - 7\lambda + 2, c = 2m - 4$

**Ex 4 :** a) 11 b) -1 c) 5 On en déduit que, en général :  $\text{Det}(A + B) \neq \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$

**Ex 5 :** *Définition :* Une matrice carrée est dite **triangulaire** si tous ses éléments au-dessous (ou au dessus) de la diagonale principale sont tous nuls. Les matrices a) et b) sont des matrices *triangulaires inférieures* et c) et d) sont des matrices *triangulaires supérieures*.

1. a)  $\det(A) = 15$  b)  $\det(B) = 42$  c)  $\det(A) = -18$  d)  $\det(A) = 24$

2. Si la matrice est triangulaire inférieure ou supérieure alors le déterminant est donné par le produit des éléments de la diagonale principale.

**Ex 6 :** a)  $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ,  $\text{Det}(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Det}(A)\text{Det}(B) &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} - \cancel{a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}} \\ &\quad - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} - \cancel{a_{22}b_{21}a_{12}b_{22}} = \end{aligned}$$

ainsi:  $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A)\text{Det}(B)$

**Ex 7 :** a)  $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 4k = 2k(k - 2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } k = 2$

b)  $\text{Det}(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + (-1) \cdot x \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + 1 \cdot c \cdot \begin{vmatrix} x & a \\ x & 0 \end{vmatrix} + (-1)(-1)a \cdot \begin{vmatrix} x & b \\ x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow abc - xbc - acx - abx = 0 \Leftrightarrow xbc + acx + abx = abc \Leftrightarrow x(bc + ac + ab) = abc$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

**Ex 9 :**  $s = -p, t = -p, u = p, v = 0, w = 3p$

**Ex 10 :**  $a = 0, b = (x - 1)(x - \alpha), c = -(t + 2)(t - 2)(t - 4), d = (x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + zx)$

**Ex 11 :** a)  $x = a$  ou  $x = b$  b) même solution que a)

**Ex 12 :**  $a = 27, b = 512, c = (eh - gf)(ps - rq)$