Algèbre linéaire Série 5

Exercice 1 : Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition suivantes :

$$(x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2) \text{ et } \alpha(x_1; x_2) = (\alpha x_1; x_2)$$

Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2 : Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ muni de ses deux lois de composition habituelles ? *(voir exemple 1, p.36 théorie)*

$A = \{(x; y; z) | x = 12\}$ $\quad C = \{(x; y; z) | y = 3x\}$ $\quad E = \{(x; y; z) | 3x + 4y - 5z = 0\}$

$B = \{(x; y; z) | z = 0\}$ $\quad D = \{(x; y; z) | 2x + y + z = 21\}$ $\quad F = \{(x; y; z) | xy = z\}$

Exercice 3 :

Ecrire le vecteur $v = (1; -2; 5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1; 1; 1), e_2 = (1; 2; 3)$ et $e_3 = (2; -1; 1)$

Exercice 4 :

Pour quelles valeurs de k le vecteur $u = (1; -2; k)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $v = (3; 0; 2)$ et $w = (2; -1; -5)$?

Exercice 5 : Écrire la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sous forme de combinaison linéaire des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 :

Déterminer si le vecteur $v = (3; 9; -4; -2)$ est une combinaison linéaire ou pas des vecteurs $u_1 = (1; -2; 0; 3)$, $u_2 = (2; 3; 0; -1)$ et $u_3 = (2; -1; 2; 1)$, c'est-à-dire s'il appartient à l'espace engendré par les u_i.

Exercice 7 :

Montrer que les vecteurs $u = (6; 2; 3; 4), v = (0; 5; -1; 1)$ et $w = (0; 0; 7; -2)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 8 :

Soit $M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Les matrices A, B et C sont elles dépendantes ou indépendantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 : Soit $M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Les matrices A, B et C sont elles dépendantes ou indépendantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 :

Déterminer si les ensembles de vecteurs suivants forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

a) $(1;1;1) et\ (1;-1;5)$

b) $(1;2;3), (1;0;-1), (2;1;2) et\ (3;-1;0)$

c) $(1;1;1), (1;2;3) et\ (2;-1;1)$

d) $(1;1;2), (1;2;5)\ et\ (3;5;12)$

Solutions Algèbre linéaire Série 5 :

Exercice 1:

$\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois n'est pas un espace vectoriel car la propriété $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ concernant la loi externe ne serait pas remplie.

Un simple contre exemple suffit : $(2+3) \cdot (1;1) = 5 \cdot (1;1) = (5;1)$
qui n'est pas égal à: $2 \cdot (1;1) + 3 \cdot (1;1) = (2;1) + (3;1) = (5;2)$

Exercice 2 : Les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ sont B, C et E

Exercice 3: On cherche α, β et γ tels que: $(1;-2;5) = \alpha(1;1;1) + \beta(1;2;3) + \gamma(2;-1;1)$

Ce qui nous amène à résoudre: $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 3\beta + \gamma = 5 \end{cases}$ dont on obtient les solutions: $\alpha = -6, \beta = 3$ et $\gamma = 2$

Exercice 4 : On pose $(1;-2;k) = \alpha(3;0;2) + \beta(2;-1;-5)$

Résolvons: $\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 1 \\ -\beta = -2 \\ 2\alpha - 5\beta = k \end{cases}$ donc $\beta = 2$ (2e ligne) et $\alpha = -1$ (1e ligne) ainsi $k = -12$ (3e ligne)

Exercice 5 :

Posons $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{pmatrix}$

Résolvons : $\begin{cases} x = 3 \\ x + 2z = 1 \\ x + y = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$ dont les solutions sont: $x = 3, y = -2\ et\ z = -1$ donc $E = 3A - 2B - C$

Exercice 6 : Soit v une combinaison linéaire de u_i. On posera : $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$

$$\begin{aligned} (3;9;-4;-2) &= x(1;-2;0;3) + y(2;3;0;-1) + z(2;-1;2;1) \\ &= (x + 2y + 2z; -2x + 3y - z; 2z; 3x - y + z) \end{aligned}$$

On tombe donc sur le système : $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ -2x+3y-z=9 \\ 2z=-4 \\ 3x-y+z=-2 \end{cases}$

En résolvant ce système, on trouve une solution $x=1, y=3, z=-2$. Si le système n'avait pas eu de solution, on n'aurait pas pu trouver de combinaison linéaire adéquate.

Exercice 7 : On écrit une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs

$$x(6;2;3;4)+y(0;5;-3;1)+z(0;0;7;-2)=(0;0;0;0)$$

et on cherche les solutions du système $\begin{cases} 6x=0 \\ 2x+5y=0 \\ 3x-3y+7z=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{cases}$

On trouve $x=0, y=0$ et $z=0$. Une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs a nécessairement des coefficients nuls. Les vecteurs sont linéairement indépendants

Exercice 8 : On écrit une combinaison linéaire nulle de ces trois matrices:

$$x\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&0\\0&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&z\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

On est amené au système suivant : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ x=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ dont les solutions sont $x=0, y=0$ et $z=0$.

Les matrices sont indépendantes

Exercice 9 : On écrit une combinaison linéaire nulle de ces trois matrices

$$x\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&-5\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x&2x\\3x&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y&-y\\2y&2y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&-5z\\-4z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

On est amené au système suivant : $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ 2x-y-5z=0 \\ 3x+2y-4z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$

Ce système possède plus d'équations que d'inconnues. La pluspart du temps, de tels systèmes n'ont pas de solutions. On vérifie quand même. On trouve que l'ensemble solution de ce système est $\{(-2\lambda;\lambda;-\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$. Il y a donc une infinité de combinaisons linéaires nulles à coefficients non tous nuls de ces trois matrices. Elles sont donc linéairement dépendantes.

Exercice 10 :

a) et b) ne peuvent pas être des bases de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Une base doit donc posséder exactement 3 vecteurs.
c) peut servir de base car les vecteurs sont indépendants.
d) ne peut former une base car les vecteurs sont linéairement dépendants.