Algèbre linéaire

Matériel :

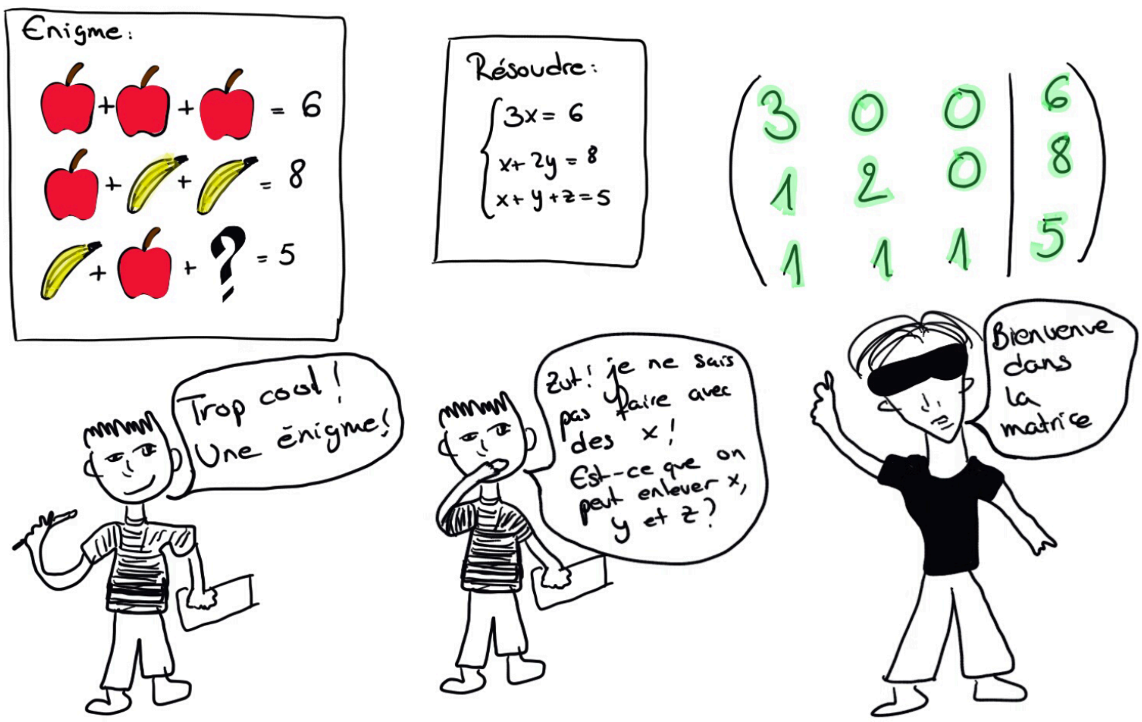
- Monographie de la CRM n°28, *Algèbre linéaire* (référence pour le cours)
- Formulaires et tables CRM, pour **les épreuves** (et cours)
- Ce polycopié
- Les séries intitulées "Algèbre linéaire Série ... " (ALS1, ALS2, etc.)
- Calculatrice personnelle non programmable

Introduction

En première année, nous avons étudié la résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues pour trouver le point d'intersection entre deux droites.

En troisième année, nous avons repris ce chapitre pour résoudre des calculs d'intersection de droites dans l'espace. Il est possible de résoudre des systèmes à l'aide d'une méthode (par addition, comparaison ou soustraction pour des systèmes 2x2, par la méthode de Gauss pour les systèmes 3x3).

Nous allons apprendre à utiliser un nouvel outil pour ce type de résolutions : les tableaux de nombres (matrices). Ce nouvel outil aura aussi d'autres propriétés que de résoudre des systèmes d'équations.



Rappels

Avant de pouvoir utiliser le calcul matriciel, il convient de faire quelques rappels sur la résolution de systèmes d'équations à plusieurs inconnues.

On distingue 3 cas :

Un système est

- ***Régulier*** s'il admet une solution unique
- ***Indéterminé*** s'il possède une infinité de solutions
- ***Impossible*** s'il ne possède pas de solution

Exemple de système régulier : Résolution selon la méthode de Gauss

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+4y+6z=18 \\ 2x-y+2z=11 \\ 3x+4y-2z=-4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \frac{1}{2}\cdot L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=9 \\ 2x-y+2z=11 \\ 3x+4y-2z=-4 \end{array}\right| \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2\cdot L_1 \\ L_3-3\cdot L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=9 \\ -5y-4z=-7 \\ -2y-11z=-31 \end{array}\right| \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ -5\cdot L_3+2\cdot L_2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=9 \\ -5y-4z=-7 \\ 47z=141 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{1}{47}\cdot L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=9 \\ -5y-4z=-7 \\ \mathbf{z=3} \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Il suffit ensuite d'insérer la solution $z=3$ dans les lignes 1 et 2 pour obtenir les valeurs de x et y:

On obtient finalement la solution : $S=\{(2;\ -1;3)\}$

Méthode de Gauss :

1) Se débrouiller pour avoir x en début de première ligne (échanger les lignes, multiplier ou diviser par un même nombre réel, etc.)
2) Soustraire la première ligne à la deuxième et la troisième ligne pour ne plus avoir de x aux lignes 2 et 3.
3) Soustraire la ligne 2 de la ligne 3 pour ne plus avoir de y à la dernière ligne. (Position triangle)
4) Insérer la valeur de z dans la ligne 2 pour trouver y.
5) Insérer la valeur de y dans la ligne 1 pour trouve x.
6) Donner l’ensemble solution.

Remarque : *Est-ce que vous voulez essayer de résoudre sans x,y et z ?*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ 3 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Exemple de système indéterminé :

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=3 \\ x-2y+z=1 \\ 2x-y-z=4 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-2\cdot L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-2z=3 \\ -3y+3z=-2 \\ -3y+3z=-2 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-2z=3 \\ -3y+3z=-2 \\ 0z=0 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On s'aperçoit donc que le système initial admet une équation obtenue par une combinaison linéaire des deux autres. Le système initial 3×3 est donc équivalent à un système formé de deux équations à trois inconnues (2×3).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-2z=3 \\ x-2y+z=1 \\ 2x-y-z=4 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-2z=3 \\ x-2y+z=1 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y-2z=3 \\ -3y+3z=-2 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

Le système étant réduit, on pose $z=\lambda$ (un paramètre choisi librement, $\lambda \in \mathbb{R}$) On obtient une valeur pour x et y en fonction de λ:

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-2\lambda=3 \\ -3y+3\lambda=-2 \\ z=\lambda \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y-2\lambda=3 \\ y=\lambda+\frac{2}{3} \\ z=\lambda \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\lambda+\frac{7}{3} \\ y=\lambda+\frac{2}{3} \\ z=\lambda \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

La solution générale s'écrit alors : $S=\left\{\left(\lambda+\frac{7}{3};\lambda+\frac{2}{3};\lambda\right)\middle|\,\lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Exemple de système impossible :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x-y-2z=-2 \\ 3x\qquad -z=10 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ -3y-4z=-14 \\ -3y-4z=-8 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ -3L_3+3L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ -3y-4z=-14 \\ 0z=-18 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

La ligne 3 est donc une équation impossible. Le système ne possède pas de solution : $S=\emptyset$

Propriétés :

Tout système linéaire peut-être réduit de la sorte, par applications successives des 3 règles d'équivalences :

Deux systèmes d'équations sont équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

On obtient un système équivalent lorsque :

- On permute deux équations
- On multiplie une équation par un nombre non nul
- On additionne à une équation une combinaison linéaire des autres.

Définition :

Un système linéaire dont les coefficients du second membre sont nuls est appelé un ***système homogène***. Il peut, soit mener à la solution ***nulle*** $S = \{0\}$ et dans ce cas le système est régulier ; soit mener à une indétermination. Le système homogène ne peut jamais être impossible.

Exemples :

(1) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $\quad S = \{(0; 0; 0)\}$

(2) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$ $\quad S = \{(\lambda; \lambda) | \lambda \epsilon \mathbb{R}\}$

Exercice : Résoudre le système suivant et donner l'ensemble solution

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$$

- S***érie de révisions sur la résolution des systèmes***

1. Calcul matriciel

La notation matricielle fut utilisée pour la première fois en 1858 par le mathématicien anglais Arthur Cayley (1821-1895). Il l'a utilisée pour exprimer en abrégé un système d'équations linéaires. Parmi les instruments utilisés en mathématique, cette notation demeura assez longtemps marginale parce qu'à cette époque l'emploi des mathématiques était surtout orienté vers les sciences physiques.

En 1925, le physicien allemand Werner Heisenberg utilisa cet outil mathématique dans ses travaux sur la mécanique quantique. C'est toutefois l'avènement des ordinateurs ultra rapides qui a le plus influencé le développement de l'algèbre matricielle. Ceci deviendra très apparent depuis la fin de la seconde guerre mondiale. A partir de là, le champ d'application des matrices s'étend à l'administration, à la psychologie, à la génétique, aux statistiques, à l'économie, etc. Avec cet instrument s'est développé également un nouveau secteur des mathématiques, la programmation linéaire (recherche de solutions avec des coûts minimaux, respectant des contraintes imposées).

Quotidiennement, nous avons tous à lire, interpréter ou utiliser des tableaux de nombres. Par exemple, une échelle salariale est fréquemment donnée sous la forme :

Expérience (années) / Échelon	1	3	5	10
1	5000	6000	7000	9000
2	5400	6450	7500	9750
3	5800	6900	8000	10500
4	6200	7350	8500	11300

Nous appellerons ces tableaux des matrices, leur manipulation nous permettra de résoudre certains problèmes.

Afin de résoudre un système linéaire qui contient un nombre élevé d'équations et d'inconnues, on introduit des tableaux rectangulaires de nombres.

Exemple 1 : *On considère un système formé de deux équations à trois inconnues :*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + y + 6z = 11 \end{cases} \qquad \star$$

Un tel système linéaire peut apparaître, par exemple, dans un problème de géométrie vectorielle de l'espace (chapitre étudié en 3e) où l'on cherche à établir une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans sécants.

En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan (étudié en 1e), le système initial se transforme en :

$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2x+y+6z=11 \end{cases}\left|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2-2\cdot L_1\to L_2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=5 \\ y-2z=-1 \end{cases}\left|\begin{array}{c} L_1-L_2\to L_1 \\ L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=5 \\ -y+2z=1 \end{cases}\left|\begin{array}{c} L_1 \\ (-1)\cdot L_2\to L_2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+4z=6 \\ y-2z=-1 \end{cases}\Bigg|$$

Ce système étant réduit, on pose $z=\lambda$ *(un paramètre choisi librement) et on obtient immédiatement une valeur pour* $x=6-4z=6-4\lambda$ *et* $y=-1+2z=-1+2\lambda$ *en fonction de ce paramètre.*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6-4\lambda \\ y=-1+2\lambda \end{cases}\Bigg|$$

Le système initial est donc indéterminé et la solution générale $(x;y;z)=(6-4\lambda;-1+2\lambda;\lambda)$*peut s'écrire sous la forme*

$$S=\{(6-4\lambda;-1+2\lambda;\lambda)|\lambda\in\mathbb{R}\}$$

En géométrie, on l'écrit comme équation paramétrique d'une droite :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\lambda\in\mathbb{R}$$

Reprenons le système ☆ *:* $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+x_2+6x_3=11 \end{cases}$

Les informations nécessaires à sa résolution sont entièrement contenues dans les deux tableaux :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Le tableau A *est la matrice des coefficients et* b *est la matrice des termes constants du système. Pour retrouver le système initial à partir de ces deux matrices, on convient d'écrire :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} \text{ où } A\cdot X=B \text{ avec } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où la multiplication "matrice par vecteur" est effectuée comme produit scalaire de chaque ligne de A *par la matrice-colonne* X*.*

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 2} \\ 2 \quad 1 \quad 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boxed{1\cdot x_1+1\cdot x_2+2\cdot x_3} \\ 2\cdot x_1+1\cdot x_2+6\cdot x_3 \end{pmatrix}$$

*En mathématiques, on désigne par **matrice** un tableau rectangulaire de nombres. Les matrices sont utiles pour structurer des informations numériques. C'est ainsi qu'un système linéaire peut être donné par la matrice de ses coefficients et la matrice-colonne de ses termes constants.*

Exemple 2 :

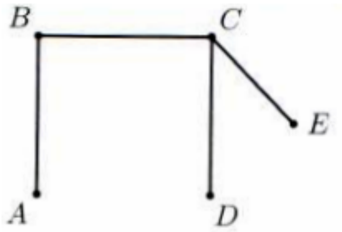
*Historiquement les premières matrices sont apparues sous la forme de **carrés magiques** qui sont des tableaux carrés de nombres entiers (tous les nombres de 1 à n^2) tels que la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des deux diagonales est une même constante. Dans cet exemple, la "constante magique" vaut 34.*

Les carrés latins et gréco-latins constituent d'autres formes de carrés de nombres entiers et son les prédécesseurs de nombreux jeux tels que le sudoku ou la kakuro.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Exemple 3 :

*Pour modéliser un graphe comme celui représenté ci-dessous, on utilise une **matrice d'adjacence** qui contient les nombres 1 ou 0 selon que deux sommets sont reliés par une arrête ou non. Cette matrice présente une symétrie par rapport à une diagonale.*



	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	1	0	1	0	0
C	0	1	0	1	1
D	0	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

Exemple 4 :

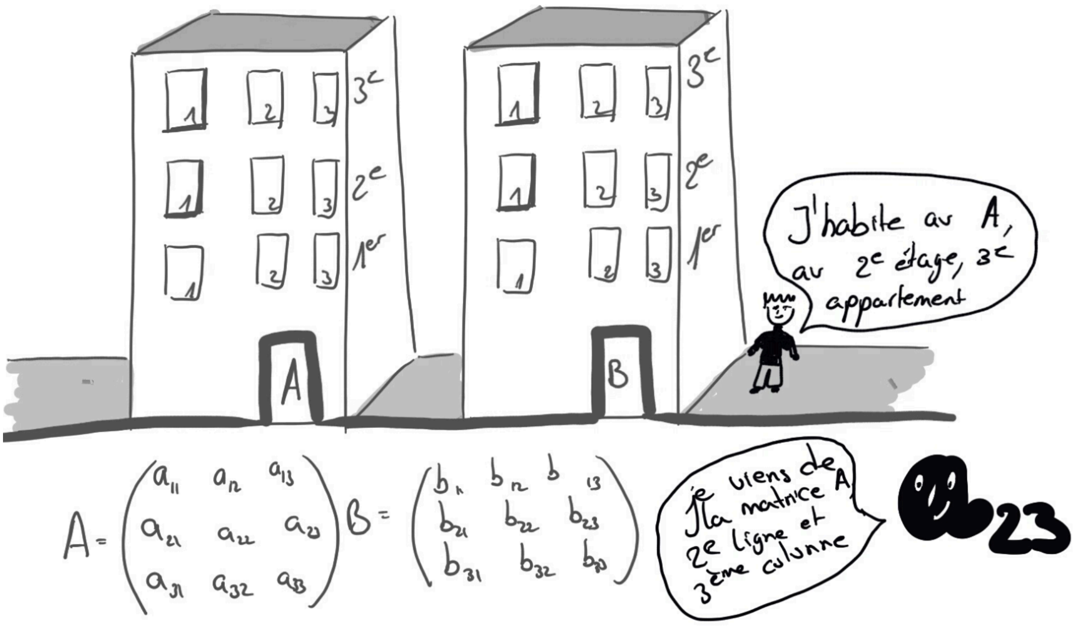
Pour sauvegarder une image dans un ordinateur, on utilise une matrice de nombres réels qui indiquent pour chaque pixel (point.image) le niveau de gris correspondant (1 pour blanc, 0 pour noir).

0.76	0.00	0.51	0.88	0.88
0.38	0.09	0.27	0.42	0.33
0.82	0.29	0.44	0.91	0.85

La taille de ces matrices peut devenir énorme. Pour des photos numériques en couleur, on utilise trois matrices qui donnent les intensités de trois couleurs primaires : le rouge, le vert et le bleu (RVB)

1.1 Matrices et calcul matriciel

Pour apprendre à utiliser les matrices, il convient de partir d'une définition. Nous pourrons ensuite définir des opérations (somme, différence, produit) et son utilité viendra par la suite.



1.1.1 Définitions :

Une ***matrice*** $\boldsymbol{m \times n}$ (dite matrice m, n) est un tableau rectangulaire de nombres où m représente le nombre de lignes et n le nombre de colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

dont les a_{ij} sont des nombres réels. L'élément a_{ij} a pour adresse la i-ème ligne et la j-ème colonne. Nous emploierons une lettre majuscule pour représenter une matrice et des lettres minuscules affectées de 2 indices pour désigner les éléments de la matrice.

Remarque : L'ensemble des matrices de type $m \times n$ à coefficients réels se note $\boldsymbol{M_{m \times n}}(\mathbb{R})$.

Exemple :

Une matrice 2×3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Les éléments sont :

$a_{11} = 1$ $\quad a_{12} =$ $\quad a_{13} =$ $\quad a_{21} =$ $\quad a_{22} =$ $\quad a_{23} =$

Matrices particulières :

- Si $m = 1$, A est une ***matrice-ligne***
  exemple : $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

- Si $n = 1$, A est une ***matrice-colonne***.
  exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- On appelle ***matrice carrée*** toute matrice de type $n \times n$
  exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

- On appelle ***matrice nulle*** de type $m \times n$, la matrice notée $O = (c_{ij})$ où $c_{ij} = 0\ \forall i \in \{1; \dots, m\}$ et $\forall j \in \{1; \dots; n\}$
  exemple : La matrice nulle de type 2×2: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- On appelle **matrice identité** de type $n \times n$, la matrice carrée notée $I = (c_{ij})$ où $c_{ij} = \begin{cases} 1, si\ i = j \\ 0, si\ i \neq j \end{cases}$ pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$ et tout $j \in \{1; \dots; n\}$

  exemple : la matrice identité de type 2×2: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont ***égales*** si elles sont de même type $m \times n$ et si $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i \in \{1; \dots, m\}$ et $\forall j \in \{1; \dots; n\}$
  exemple: les matrices A et B de type 2×2 sont égales $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 6/2 & -2 \end{pmatrix}$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Matrice

On note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})$.

Cette matrice est de *type* $n \times m$ (n lignes, m colonnes).

Les nombres a_{ij} sont les *éléments de la matrice*.

1.1.2 Opérations sur les matrices :

La somme de deux matrices :

Définition : Soit A et B deux matrices de type $m \times n$. ***La somme $A + B$*** est la matrice C dont l'élément c_{ij} est la somme $a_{ij} + b_{ij}$ des éléments correspondants de A et de B $\forall i \in \{1; \dots, m\}$ et $\forall j \in \{1; \dots; n\}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = C$$

Remarque : On ne peut additionner que des matrices de <u>même type</u>.

Exemples :

1) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = pas\ défini$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices

$A + B = C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
Chaque élément de la matrice $A + B$ est égal à la somme des éléments correspondants de A et de B.
On ne peut additionner que des matrices de même type.

Le produit d'un nombre et d'une matrice :

Définition : Le ***produit d'une matrice A de type $m \times n$ par un scalaire λ,*** noté λA, est la matrice C dont l'élément c_{ij} est le produit de λ par l'élément a_{ij}, $\forall i \in \{1; \dots, m\}$ et $\forall j \in \{1; \dots; n\}$.

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = C$$

Exemples :

1) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $6 \cdot A = \begin{pmatrix} 30 & 18 & 6 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

2) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

alors $-3 \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ et $3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -15 & -6 \end{pmatrix}$

Propriétés de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire : $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $\exists O \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ t.q.\ A + O = A$
4) $\exists -A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ t.q.\ A + (-A) = O$
5) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
6) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$
7) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$
8) $\exists 1 \in \mathbb{R}\ t.q.\ 1 \cdot A = A$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Produit d'une matrice par un nombre réel λ

$\lambda A = C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \lambda a_{ij}$
Chaque élément de la matrice A est multiplié par λ.

Le produit de deux matrices :

La multiplication de matrices n'est pas une opération aussi simple que les deux opérations définies précédemment.

Définition : Soit A une matrice de type $m \times n$ et B une matrice de type $n \times p$. Le **produit $\boldsymbol{A \cdot B}$** est la matrice C dont l'élément c_{ij} est le produit scalaire entre la $i$ème ligne de la matrice A et la $j$ème colonne de la matrice B pour tout $i \in \{1; \dots; m\}$ et tout $j \in \{1; \dots; p\}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boxed{\mathbf{a_{i1}} \quad \mathbf{a_{i2}} \quad \dots \quad \mathbf{a_{in}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & \mathbf{b_{nj}} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots\dots + a_{in} \cdot b_{nj}}$$

Remarques : 1) Pour que le produit matriciel soit possible, il faut que le nombre de colonne de la première matrice soit égale au nombre de lignes de la seconde matrice

2) Pour insister sur les formats on peut écrire : $\boldsymbol{A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}}$

3) Le produit de deux matrices $n \times n$ est toujours défini et est une matrice $n \times n$.

Exemples :

1) $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & 7 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{21} & 17 & 5 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = impossible$, car le nombre de colonnes de la première matrice est différent du nombre de lignes de la deuxième matrice.

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 0 \\ -13 & -9 & -7 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} =$

Propriétés de la multiplication matricielle : $\forall A, B \ et \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $A \cdot O = O \cdot A = 0$
2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3) $A \cdot I = I \cdot A = A$
4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Remarque : La multiplication n'est **en générale pas commutative** : $A \cdot B \neq B \cdot A$

Exemples :

1) $\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}\right] \neq$

2) $\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right]$

Dans la CRM :

Produit d'une matrice $n \times m$ par une matrice $m \times p$

On note $A = (a_{ij})$ une matrice de type $n \times m$ et $B = (b_{jk})$ une matrice de type $m \times p$. Le produit AB est alors une matrice $C = (c_{ik})$ de type $n \times p$ définie par $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1k} & \\ & b_{2k} & \\ & \vdots & \\ & b_{mk} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & c_{ik} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Chaque élément c_{ik} de la matrice AB est égal à la somme des produits des éléments de la i-ème ligne de A par les éléments de la k-ième colonne de B.
On ne peut multiplier deux matrices que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.

Propriétés

On suppose que les matrices sont de type adéquat pour effectuer les opérations considérées.

$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A + B = B + A$	$A + O = A$	$A + (-A) = O$

$1A = A$	$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$	$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$	$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

$A(BC) = (AB)C$	$A(B + C) = AB + AC$	$(A + B)C = AC + BC$

En général, AB est différent de BA.

La matrice transposée :

Définition : Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ alors $A^T = (c_{ij})$ est une matrice de type $n \times m$ avec $c_{ij} = a_{ji}$ pour tout $j \in \{1; \dots ; n\}$ et tout $i \in \{1; \dots ; m\}$. La matrice A^T est la ***matrice transposée de A***.

Cette définition sera importante dans la notion de la *matrice inverse.*

Exemples : 1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$

2) Si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés de la transposition d'une matrice : $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

1) $(A + B)^T = A^T + B^T$	3) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
2) $(A^T)^T = A$	4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Que peut- on trouver dans la table CRM ?

Matrices particulières

Une *matrice nulle*, notée O, est une matrice dont tous les éléments sont nuls.

La *matrice opposée* de la matrice A est la matrice $-A = (-a_{ij})$

La *matrice transposée* de la matrice A, notée ${}^tA$, est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Ainsi, si A est de type $n \times m$, alors ${}^tA$ est de type $m \times n$ et on a ${}^tA = C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ji}$

Propriétés

${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$	${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$	${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

➢ ***Algèbre linéaire Série 1***

1.2 Déterminant d'une matrice carrée[1]

Le déterminant est une opération qui nous allons pouvoir définir sur des matrices carrées.

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Définition : le ***déterminant*** d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est le nombre :

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple : $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$

Exercice : Calculer $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$

Mais avant d'apprendre à l'utiliser, cherchons des exemples dans les chapitres étudiés dans les années précédentes : la résolution de systèmes d'équations algébrique (première) et une condition de colinéarité en géométrie vectorielle (deuxième année, dans le plan)

Exemple : Deux vecteurs $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ du plan vectoriel sont colinéaires si et seulement si

$$Det(\vec{a};\, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

En effet, $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un nombre λ tel que :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On peut réécrire cette égalité :

$\begin{cases} a_1 = \lambda b_1 \\ a_2 = \lambda b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{a_1}{b_1} \\ \lambda = \frac{a_2}{b_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ qui correspond au déterminant nul.

Application : $\vec{a} = \binom{1}{-2}$ et $\vec{b} = \binom{-3}{6}$ $\quad Det(\vec{a};\, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} =$

[1] Algèbre linéaire, p. 16-23

Exemple : *On considère le système linéaire formé par les équations cartésiennes de deux droites du plan :*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Les droites se coupent en un point si ce système admet une solution unique. Elles sont parallèles (strictement parallèles ou confondues) lorsque les couples $(a_{11}; a_{12})$ et $(a_{21}; a_{22})$ sont proportionnels, c'est-à-dire lorsque $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$.

Ainsi, pour déterminer si le système donné possède une solution unique ou non, il suffit de calculer le nombre $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \Big| \cdot a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \Big| \cdot (-a_{12}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \end{cases} \quad +$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \text{ et } \boxed{y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}}$$

- *S'il est nul, le système est singulier : il ne possède alors aucune solution ou il en a une infinité.*
- *Par contre, si ce nombre est différent de zéro, le système est régulier et admet une solution unique.*

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Définition : le **déterminant d'une matrice carrée** $A = (a_{ij})$ d'ordre 3 est le nombre

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Cette formule a été appliquée sur la première colonne. On peut aussi la faire sur la première ligne.

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 4 = 39$

Exercice : Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$

➢ ***Algèbre linéaire Série 2 Exercice 1 à 6***

La règle de Sarrus :

Pour le calcul du déterminant d'une matrice d'ordre 3 (uniquement), on peut aussi utiliser ***la règle de Sarrus***. On réécrit à droite du déterminant les deux premières colonnes. Le déterminant est alors égal à la somme des produits des triplets d'éléments situés sur une parallèle à la diagonale principale diminuée de la somme des produits des triplets d'éléments situés sur une parallèle à la diagonale non principale :

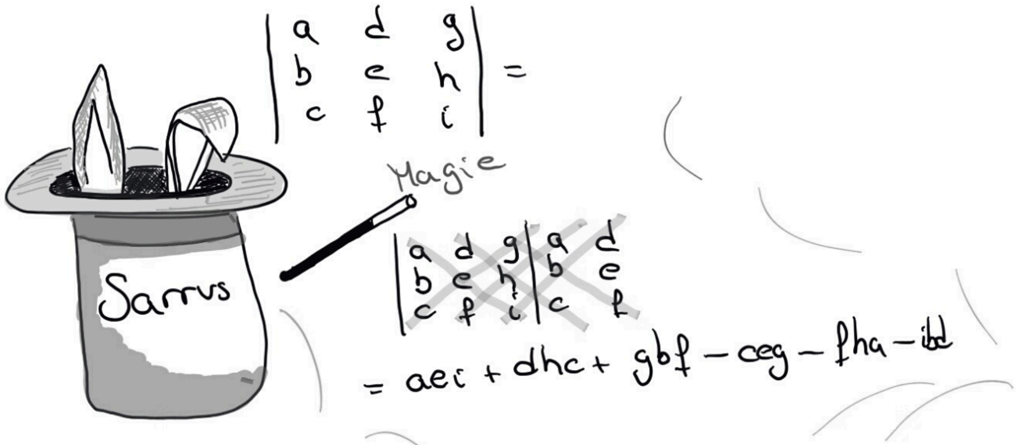
$$\left|\begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix} = aei + dch + gbf - gec - ahf - dbi$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Det}(A) = \left|\begin{matrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 5\cdot 2\cdot(-1) + 4\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 5 - (-1)\cdot(-1)\cdot 4$$
$$= -63$$

Reprenons l'exemple :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$



Que peut-on trouver dans le grimoire CRM ?

Règle de Sarrus

Cette règle n'est valable que pour l'ordre 3.

$$\begin{matrix} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3 \end{matrix} \qquad \diagdown \oplus \qquad \diagup \ominus$$

$\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de type $n \times n$.

On définit, par récurrence, une application : $Det : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathrm{Det}(A) \end{cases}$ de la manière suivante :

- Si $n = 1$, c'est-à-dire si $A = (a)$, on pose : $\det(A) = a$
- Si $n > 1$, notons A_{ij} la matrice obtenu de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne (C'est-à-dire la ligne et la colonne qui passent par l'élément a_{ij}), on pose alors (puisque $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$):
  $\mathbf{Det}(\boldsymbol{A}) = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}} \cdot \boldsymbol{a_{11}} \cdot \mathbf{Det}(\boldsymbol{A_{11}}) + (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+2}} \cdot \boldsymbol{a_{12}} \cdot \mathbf{Det}(\boldsymbol{A_{12}}) + \cdots + (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+}\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{a_{1n}} \cdot \mathbf{Det}(\boldsymbol{A_{1n}})$

Le scalaire $\det(A)$ est dit ***déterminant de la matrice A*** et on le note habituellement :

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Définition : On appelle ***cofacteur de l'élément a_{ij}*** le scalaire : $cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot Det(A_{ij})$ où A_{ij} est la matrice obtenue de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $cof(a_{11}) = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$

$cof(a_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$

Remarques : a) Le signe $(-1)^{i+j}$ dans la définition de cofacteur est déterminé par le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

b) Avec cette notation, la formule donnant la définition du déterminant, s'écrit :

$$Det(A) = a_{11} \cdot \mathrm{cof}(a_{11}) + a_{12} \cdot cof(a_{12}) + \cdots + a_{1n} \cdot cof(a_{1n})$$

Proposition : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\boldsymbol{Det(A) = a_{i1} \cdot cof(a_{i1}) + a_{i2} \cdot cof(a_{i2}) + \cdots + a_{in} \cdot cof(a_{in})}$$

Développement du déterminant selon la $i$ème ligne

$$\boldsymbol{Det(A) = a_{1j} \cdot cof(a_{1j}) + a_{2j} \cdot cof(a_{2j}) + \cdots + a_{nj} \cdot cof(a_{nj})}$$

Développement du déterminant selon la $j$ème colonne

La démonstration de cette proposition sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Développons selon la 3e ligne :

$$Det(A) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 18 = -12$$

Développons selon la 3e colonne :

$$Det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 18 = -12$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Développons selon la 1e colonne :

$$\mathrm{Det}(A) = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (-11) - 3 \cdot 19 + 1 \cdot 7 - 4 \cdot (-17) = -4$$

Développons selon la 4e colonne :

$Det(A) =$

Remarque : Lors du calcul d'un déterminant, il faut choisir une ligne ou une colonne contenant un maximum de zéros.

Propriétés des déterminants :

Nous allons illustrer chaque propriété avec un exemple. Nous prendrons :

$\lambda = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $et\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, C_i correspond à la colonne i

Propriété 1 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ alors :

$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B)$$

Exemple : $Det(A \cdot B) = Det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right) = Det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = -9$

$Det(A) \cdot Det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) = -9$

Propriété 2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors :

$$Det(A^T) = Det(A)$$

Exemple : $Det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad Det(C^T) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

Propriété 3 :

$$Det(I) = 1$$

Exemple : $Det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Propriété 4 : Si tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) d'une matrice son nuls, son déterminant est nul

Exemple : $Det(D) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Propriété 5 : Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de la diagonale.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & a_{nn} \\ & 0 & 0 & & \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Exemple $Det(E) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$ (Voir Série 2 exercice 5)

Propriété 6 : Le déterminant d'une matrice change de signe lorsqu'on permute deux de ses colonnes (ou deux de ses lignes).
Par exemple, si l'on permute les colonnes C_j et C_l, on a:

$$Det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_l, \dots, C_n) = -Det(C_1, \dots, C_l, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

En conséquence, si deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice son identiques, son déterminant est nul.

Exemple : $Det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$

Propriété 7 : Le déterminant d'une matrice est linéaire relativement à chacune de ses colonnes (ou lignes), Par exemple, on a:

$$Det(C_1 + \widetilde{C_1}, C_2, \dots, C_n) = Det(C_1, C_2, \dots C_n) + Det(\widetilde{C_1}, C_2, \dots, C_n)$$

$$Det(\lambda C_1, C_2, \dots, C_n) = \lambda \mathrm{Det}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_\mathrm{n})$$

Exemple : 7) Voir Série 2 exercice 8 c)

Propriété 8 : Lorsqu'on multiplie tous les éléments d'une matrice carrée d'ordre n par un réel λ, le déterminant est multiplié par λ^n.

$$Det(\lambda A) = \lambda^n Det(A)$$

Exemple : $Det(3A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 27 \quad 3^2 \cdot Det(A) = 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$

Propriété 9 : Le déterminant d'une matrice est nul si deux colonnes (ou deux lignes) sont proportionnelles. Par exemple, on a:

$$Det(C_1, \lambda C_1, C_3, \dots, C_n) = 0$$

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 10 \\ 7 & -5 & -14 \end{vmatrix} = 0 \; car \; C_3 = -2C_1$

Propriété 10 : Le déterminant d'une matrice ne change pas lorsqu'on ajoute à l'une de ses colonnes un multiple d'une autre de ses colonnes (de même pour les lignes). Par exemple, on a:

$$Det(C_1, \lambda C_1 + C_2, C_3, \dots, C_n) = Det(C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$$

Exemple : 8) & 5) & 10) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 + 2C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \end{matrix}$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 24$$

Exemple de calcul simplifié à l'aide des propriétés :

$$\begin{vmatrix} 15 & 5 & 10 & 15 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 10 \\ -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_1 - 3C_2 \to C_1 \\ C_3 - 2C_2 \to C_3 \\ C_4 - 3C_2 \to C_4 \end{matrix}$$

$$= 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la première ligne :

$$= 5\cdot(-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 + 3L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$= -5\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la première colonne :

$$= -5\cdot(-1)\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot(5\cdot 13 - 9\cdot 12) = -215$$

Autre exemple :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \beta \\ \alpha & x & \beta \\ \alpha & \beta & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-\alpha & \alpha - x & 0 \\ \alpha & x & \beta \\ 0 & \beta - x & x - \beta \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

$$= (x-\alpha)(x-\beta)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & x & \beta \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Développons selon la première ligne :

$$= (x-\alpha)(x-\beta)(x+\beta+\alpha)$$

Remarque :

Ces propriétés permettent de gagner du temps sur les étapes de calculs. S'il y a moins d'étapes dans un calcul, il y a aussi moins de risque de faire des fautes !

➢ **Algèbre linéaire Série 2**

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Algèbre linéaire

Déterminant

Déterminant d'ordre deux

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Interprétation géométrique

La valeur obtenue est, au signe près, l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Propriétés

$\mathrm{Det}(\lambda\vec{a}\,;\vec{b}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b})$	$\mathrm{Det}(\vec{a}+\vec{c}\,;\vec{b}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}) + \mathrm{Det}(\vec{c}\,;\vec{b})$
$\mathrm{Det}(\vec{b}\,;\vec{a}) = -\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b})$	
$\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{a}) = 0$	$\mathrm{Det}(\vec{a}+\lambda\vec{b}\,;\vec{b}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b})$

Déterminant d'ordre trois

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$,

alors $\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Le déterminant a été calculé en le développant selon la première colonne.
On peut aussi le calculer selon la première ligne :

$$\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Interprétation géométrique

La valeur obtenue est, au signe près, le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

Propriétés

$\mathrm{Det}(\vec{a}+\vec{d}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) + \mathrm{Det}(\vec{d}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$	$\mathrm{Det}(\lambda\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$
$\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{b}\,;\vec{c}\,;\vec{a}) = \mathrm{Det}(\vec{c}\,;\vec{a}\,;\vec{b})$	$\mathrm{Det}(\vec{b}\,;\vec{a}\,;\vec{c}) = -\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$
$\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{a}\,;\vec{c}) = 0$	$\mathrm{Det}(\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$

Le procédé de calcul et les propriétés des déterminants d'ordre trois se généralisent aux ordres supérieurs.

1.3 Matrice carrée inverse

La division de matrices n'existe pas mais on peut définir une multiplication par matrice inverse. Cela sera utile pour résoudre des systèmes d'équations.

Définition : Une matrice carrée A d'ordre n est une ***matrice inversible*** si et seulement s'il existe une matrice carrée d'ordre n notée A^{-1} tel que :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

En effet :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questions :

1. Est-ce que toutes les matrices sont inversibles ?
2. Comment déterminer la matrice A^{-1} lorsqu'on connait la matrice A ?

Réponse à la question 1 :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles (pour la multiplication). Autrement dit : il n'existe pas forcément une matrice notée A^{-1} tel que : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse à la question 2 :

Nous allons chercher la matrice inverse d'une matrice 2×2 de deux manières différentes (méthode de la matrice augmentée et recherche d'une formule) puis nous définirons une formule générale pour une matrice 2×2 et nous pourrons définir une formule générale pour une matrice 3×3 et $n \times n$.

Méthode de la matrice augmentée :

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ La matrice augmentée est alors : $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

But : Avoir la matrice identité à gauche à l'aide de transformations. A droite, nous aurons la matrice inverse.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-4L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -8 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)^{L_1 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)^{-\frac{1}{5}L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)_{L_2 - 3L_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & -4 & -12/5 & 8/5 \end{array}\right)_{-\frac{1}{4}L_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & -2/5 \end{array}\right)$$

On a donc : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$

Vérification : $A \cdot A^{-1} =$

Exercice : Déterminer la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Méthode par recherche de formule :

Notons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. On a $Det(A) = ad - bc$

On cherche une matrice A^{-1} tel que : $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Posons $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ On peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + cy = 1 \\ az + ct = 0 \\ bx + dy = 0 \\ bz + dt = 1 \end{cases}$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $|A| = -5$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2z - t = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ 3z - 4t = 1 \end{cases}$$

On veut exprimer x, y, z et t en fonction de a, b, c et d: Prenons premièrement les équations avec x et y:

$$\begin{cases} ax + cy = 1 | \cdot (-d) \\ bx + dy = 0 | \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} -adx - cdy = -d \\ bcx + cdy = 0 \end{cases} + \\ \hline -adx + bcx = -d \end{array}$$

Donc $x(bc - ad) = -d \Leftrightarrow x = -\frac{d}{bc-ad} = \frac{d}{ad-bc}$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 | \cdot 4 \\ 3x - 4y = 0 | \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} 8x - 4y = 4 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} + \\ \hline 5x = 4 \end{array}$$

donc $x = \frac{4}{5}$

De la même manière, on peut isoler y, z et t. On trouve :

$$y = -\frac{b}{ad - bc}, \quad z = -\frac{c}{ad - bc}, \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

Remarque : On aurait pu faire le raisonnement avec $\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion : A est inversible (A^{-1} existe) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ *et*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{c}{ad - bc} \\ -\frac{b}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Retour à l'exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $|A| = -5$ donc $A^{-1} =$

Autre exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on calcule le déterminant : $Det(A) =$ $\neq 0$ donc A est inversible.

On obtient : $A^{-1} =$

Vérification : $A \cdot A^{-1} =$ et $A^{-1} \cdot A =$

Inverse d'une matrice $\boldsymbol{n \times n}$:

Proposition :
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $cof(A^T)$ la matrice obtenue de A^T en remplaçant chaque élément par son cofacteur.
Si A est inversible (Càd si $Det(A) \neq 0$), on a: $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \cdot cof(A^T)}$

Exemples :

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Det}(A) = ad - bc$, $A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $cof(A^T) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

SI $ad - bc \neq 0$; On a : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

donc la formule que nous avons vue pour les matrices $M_2(\mathbb{R})$ satisfait la proposition pour $M_n(\mathbb{R})$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $Det(A) = -5 \neq 0$; $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$cof(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{Donc } A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Vérification : $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^{-1} \cdot A$

➢ ***Algèbre linéaire Série 3***

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

Matrice carrée $n \times n$

La *matrice unité* est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Une matrice carrée A possède une *matrice inverse*, notée A^{-1}, si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

La matrice inverse de A existe si et seulement si $\mathrm{Det}(A) \neq 0$.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\,{}^t\!\left((-1)^{i+j}D_{ij}\right)}$$

D_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ que l'on obtient en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ avec $\mathrm{Det}(A) = ad - bc$.

1.4 Résolutions de systèmes linéaires

Nous allons étudier trois méthodes pour résoudre des systèmes linéaires à l'aide de matrices.

Première méthode : Nous allons effectuer la méthode à l'aide d'un exemple :

Exemple : Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + y + z = -6 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Ce système d'équations peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou, en posant: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = B$

On a donc l'équation $AX = B$ à résoudre. Comme dans la série 3, nous pouvons résoudre l'équation :

$$AX = B \overset{Det(A) \neq 0}{\Leftrightarrow} A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Ainsi, le système possède une solution si la matrice A est inversible. On doit donc chercher la matrice inverse de A.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$A^{-1} =$

Donc : $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ $S =$

La deuxième méthode : la matrice augmentée

Reprenons le même exemple que pour la première méthode :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}}_{B} \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

1) Avec la recherche de la matrice inverse : On cherche A^{-1} mais d'une autre manière : en utilisant les transformations sur les lignes de la matrice A augmentée de la matrice identité.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) L_1 + L_2 \to L_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) L_2 + L_3 \to L_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ On a donc : $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ainsi : $S = \{(3; -1; -2)\}$

2) **Sans recherche de la matrice inverse :** On commence avec la matrice A, augmentée avec B. En faisant apparaitre la matrice identité à la place de A, on voit alors apparaitre la solution du système dans l'autre partie.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_2 - L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Ainsi : $S = \{(3; -1; -2)\}$

La troisième méthode : La règle de Cramer

Nous allons chercher la règle pour un système 2×2 puis ensuite pour un système $n \times n$:

Système d'équations linéaires 2×2 :

Soit le système $(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ un système de deux équations linéaires à deux inconnues x_1 et x_2

On veut résoudre ce système. En utilisant l'écriture matricielle, nous pouvons écrire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{B}$$

L'inconnue est alors la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

En supposant que A est inversible ($Det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$), on peut faire le même raisonnement qu'au paragraphe précédent :

$$\boldsymbol{A^{-1}}AX = \boldsymbol{A^{-1}}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{Det(A)} \cdot (a_{22}b_1 - a_{12}b_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{Det(A)} \cdot (-a_{21}b_1 + a_{11}b_2) \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{Det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{Det(A)} \\ x_2 = \dfrac{Det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{Det(A)} \end{cases} \quad Règle\ de\ Cramer}$$

Remarque :

Le système (S) de deux équations linéaires à deux inconnues admet une unique solution $\Leftrightarrow$ $Det(A) \neq 0$

Exemple : Résoudre le système linéaire 2×2: $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Avec Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} =$$

$y =$

$$S = \left\{ \left(8; \tfrac{31}{2}\right) \right\} = \{(8; 15{,}5)\}$$

Système d'équations linéaires $n \times n$:

Proposition :

Soit $(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nnx_n} = b_n \end{cases}$ un système d'équations linéaires $n \times n$ tel que $Det(A) \neq 0$

Le système d'équations linéaires $n \times n$ admet une unique solution et elle est donnée par la règle de Cramer :

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1,2, \dots, n$$

où A_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{ème}$ colonne de A par la colonne des éléments de B

(La démonstration de cette proposition sort du cadre de ce cours et ne sera donc pas exposée ici)

Exemple :

Considérons le système linéaire 3×3: $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x - y + z = 200 \\ x - y + z = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$

Avec Cramer :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 200 & -1 & 1 \\ 100 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 100; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 2 & 200 & 1 \\ 1 & 100 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 0\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 2 & -1 & 200 \\ 1 & -1 & 100 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

$$S = \{(100; 0; 0)\}$$

➢ ***Algèbre linéaire Série 4***

Notation :

Pour le système linéaire 2×2, nous pouvons aussi utiliser la notation suivante :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases}$$

qui admet une solution unique si et seulement si $Det(\vec{a};\ \vec{b}) \neq 0$,

où $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $et\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $x_1 = \frac{Det(\vec{c};\vec{b})}{Det(\vec{a};\vec{b})}$ et $x_2 = \frac{Det(\vec{a};\vec{c})}{Det(\vec{a};\vec{b})}$

C'est cette notation qui est utilisée dans la table CRM.

Notation : Pour le système linéaire 3×3, les formules de Cramer deviennent :

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

On pose $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Ce système admet une solution unique si et seulement si $Det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

Ce déterminant est appelé déterminant principal. La solution peut être calculée à l'aide de la formule de Cramer :

$$x_1 = \frac{Det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})}{Det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})},\ x_2 = \frac{Det(\vec{a},\vec{d},\vec{c})}{Det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}, x_3 = \frac{Det(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{Det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$$

Si $Det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, deux cas peuvent se présenter :

1. $Det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = Det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}) = Det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) = 0$ et le système est indéterminé (possède une infinité de solutions)
2. Au moins un de ces trois déterminants est non nul et dans ce cas le système est impossible (ne possède aucune solution)

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

Système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

Le nombre $D = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$ est le *déterminant principal* du système.

Le système admet une solution unique si et seulement si $D \neq 0$

$x_1 = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{d}\,;\vec{b}\,;\vec{c})}{D}$	$x_2 = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{d}\,;\vec{c})}{D}$	$x_3 = \dfrac{\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{d})}{D}$	(règle de Cramer)

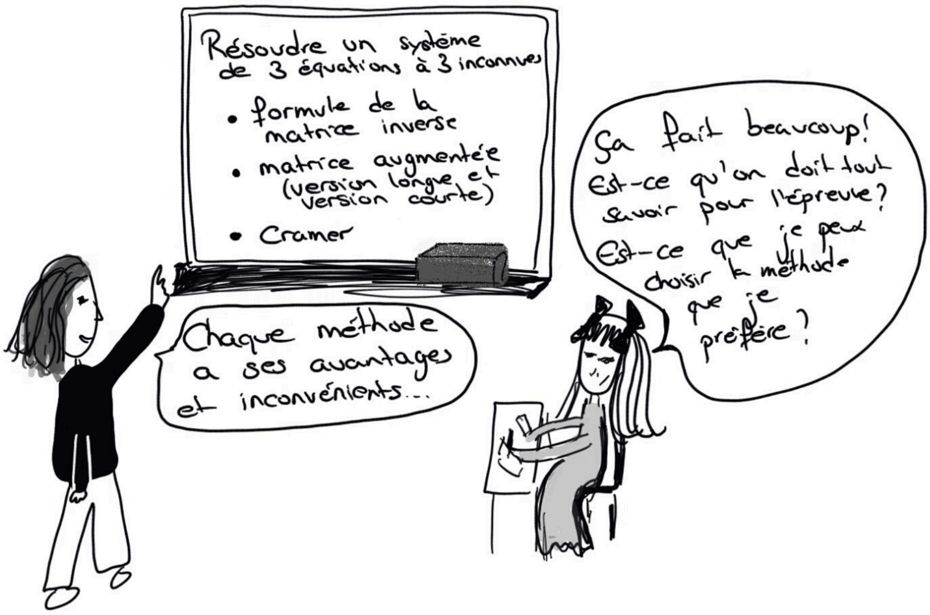
Le système admet une infinité de solutions si $D = \mathrm{Det}(\vec{d}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{d}\,;\vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{d}) = 0$ et si l'espace engendré par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est de dimension 2.

Le système n'admet aucune solution si $D = 0$ et si au moins un des 3 déterminants, $\mathrm{Det}(\vec{d}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$, $\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{d}\,;\vec{c})$ et $\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{d})$, est différent de 0.

Ces résultats se généralisent aux systèmes de n équations linéaires à n inconnues, $n \geq 4$.

Quelle est la meilleure méthode pour résoudre un système d'équations par calcul matriciel ?

Nous avons 3,5 méthodes pour résoudre un système d'équations avec le calcul matriciel. Selon le système, il est possible d'utiliser les 3,5 méthodes ou alors juste une seule.

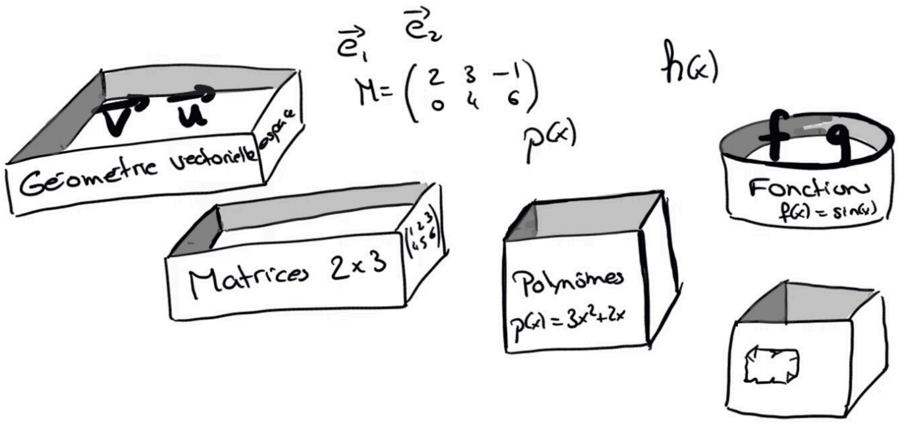


Partons de la notation du système : $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ avec $A = une\ matrice\ carrée$

	Si $\vert A\vert \neq 0$		**Si $\vert A\vert = 0$ ou si $\vert A\vert \neq 0$**
Méthode	**Cramer**	**Formule matrice inverse**	**Matrice augmentée**
Avantage	• Une formule à appliquer • Rassurant • Rapide à appliquer pour des matrices A de type 3x3	• Une formule à appliquer • On a la solution en plus de la matrice inverse. • Rapide à appliquer pour des matrices de type 2x2.	• La méthode de Gauss à appliquer • On a la solution rapidement. • On peut choisir la version avec ou sans la matrice inverse • La seule méthode toujours applicable
Inconvénients	• Impossible si $\vert A\vert = 0$ • Long si on ne maitrise pas les propriétés des déterminants • On arrive à la solution mais pas de matrice inverse.	• Impossible si $\vert A\vert = 0$ • Assez long pour les matrices de type 3x3 • Oubli fréquent : A^T	• Fait souvent peur aux élèves parce que cela concerne des cas où $S = \emptyset$ ou alors $S = \{\lambda \in \mathbb{R}\vert \ldots\}$

2. Espaces vectoriels[2]

Il est temps de comparer les différentes propriétés dans plusieurs chapitres des différentes années de cours de mathématiques au Collège.

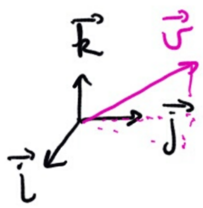


Le but est de chercher la structure commune : On définit des objets (vecteurs, polynômes, matrices, fonctions, etc.), on regarde ce qu'on peut faire avec : additionner, multiplier, composer, représenter graphiquement, etc.

Le premier chapitre a introduit la méthode de Gauss pour réduire un système linéaire d'équations afin de le résoudre. Elle utilise pour ce faire trois types d'opérations qui chacune est une **combinaison linéaire** des lignes du système.

Par exemple, la ligne L_3 est remplacée par la combinaison linéaire $(-1)L_2 + L_3$.

Les solutions des systèmes homogènes s'écrivent elles-mêmes comme des **combinaisons linéaires** et nous avons vu des systèmes homogènes dans l'ensemble de solutions était un plan dans $\mathbb{R}^3$. Cet ensemble est fermé en ce sens que toute combinaison linéaire de solutions est aussi une solution. Par contre tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'est pas solution.



La partie traitant de la géométrie vectorielle a présenté des combinaisons de vecteurs dans le plan et l'espace, et permettait d'envisager des **combinaisons linéaires** de vecteurs à n composantes dans l'espace $\mathbb{R}^n$.

Ce chapitre ira un peu plus loin, en ce sens qu'il sera une étude générale sur les **combinaisons linéaires.** Partout où il est question de combinaison linéaire, dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$ et même ailleurs, dans d'autres types d'ensemble, les résultats généraux (théorèmes) que nous allons présenter s'appliqueront. Ces ensembles porteront le nom générique d'***espace vectoriel***. Ils seront désormais notre objet d'étude.

Un espace vectoriel est une structure qui met en jeu deux ensembles : **un ensemble de vecteurs et un ensemble de scalaires.**

[2] Les références de ces paragraphes sont : Le livre n°28 de la CRM et le cours de Jann Weiss

Définition :

Un ensemble E est un ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{R}$ lorsque E est muni :

- D'une opération interne de $E \times E \to E$, appelée addition et notée " $+$ "
- D'une loi de composition externe de $\mathbb{R} \times E \to E$, appelée multiplication par un réel et notée " $\cdot$ "

satisfaisant aux huit axiomes suivants $\forall\, u, v, w \in E$ et $\forall\, \alpha$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

(1) $(u+v)+w = u+(v+w)$	Associativité de $+$
(2) $\exists o \in E$ tel que $u+o = o+u = u$	élément neutre de $+$
(3) $\forall u \in E, \exists -u \in E$ tel que $u+(-u) = (-u)+u = 0$	élément opposé de $+$
(4) $u+v = v+u$	Commutativité de $+$
(5) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$	
(6) $1 \cdot u = u$	
(7) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$	
(8) $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$	

Remarques et notation :

- On note $(\boldsymbol{E},\ +,\ \cdot)$ l'espace vectorielle muni des deux opérations
- L'ensemble E muni des 4 premiers axiomes est appelé un **groupe commutatif** ou **abélien**. On peut définir dans cet ensemble la soustraction par $u - v = u + (-v)$
- Les éléments de E sont appelés des ***vecteurs***. Les nombres réels sont aussi appelés ***scalaires***. L'élément neutre de l'addition est le vecteur nul.
- Généralement, les lettres minuscules de l'alphabet latin sont utilisées pour désigner des éléments de E et les lettres minuscules de l'alphabet grec pour désigner des nombres réels.

Exemple 1 :

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble formé de tous les n-uplets de nombres réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

On définit l'addition de deux n-uplets :

$$(x_1; x_2; \dots; x_n) + (y_1; y_2; \dots; y_n) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$$

et la multiplication par un scalaire λ comme la multiplication de chaque élément par le nombre réel λ:

$$\lambda \cdot (x_1; x_2; \dots; x_n) = (\lambda x_1;\ \lambda x_2; \dots;\ \lambda x_n)$$

*L'ensemble $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**,** muni des deux opérations, vérifie les huit axiomes et est donc un espace vectoriel.*

Exemple 2 :

L'ensemble $\boldsymbol{M_{2,3}}(\mathbb{R})$ des matrices réelles de type 2×3. On peut additionner deux matrices et multiplier une matrice par un nombre réel. L'ensemble $M_{2,3}(\mathbb{R})$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel, car cette structure vérifie les huit propriétés de l'espace vectoriel.

Exemple 3 :

L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. On peut additionner deux fonctions f et g et on peut également multiplier une fonction f par un nombre réel λ :

$$f + g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases} \qquad\qquad \lambda \cdot f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{cases}$$

L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel.

Exemple 4 :

L'ensemble $\boldsymbol{V_2}$ des vecteurs du plan muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire comme étudié en cours de mathématiques de 2e année est un espace vectoriel.

Exemple 5 :

L'ensemble E des vecteurs à deux composantes entières n'est pas un espace vectoriel car

$$0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad avec \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in E \quad mais \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \notin E$$

➢ ***Algèbre linéaire Série 5 exercice 1***

Que peut-on trouver dans la table CRM aux pages 18-19 ?

Structures algébriques

Loi de composition interne

Une *loi de composition interne* (ou *opération interne*) $\top$ dans un ensemble E est une application de $E \times E$ vers E.

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (a\,,\,b) & \mapsto & a \top b \end{array}$$

Un ensemble muni d'une ou de plusieurs lois de composition internes est une *structure algébrique*.

Propriétés

On note $\top$ et $\star$ deux lois de composition internes définies dans un ensemble E et a, a', b, c, n des éléments de E.

$\top$ est *commutative*	$a \top b = b \top a$	pour tout a, b
$\top$ est *associative*	$(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$	pour tout a, b, c
n est *élément neutre* pour $\top$	$a \top n = n \top a = a$	pour tout a
a' est le *symétrique* de a pour $\top$	$a' \top a = a \top a' = n$	
$\star$ est *distributive par rapport à* $\top$	$a \star (b \top c) = (a \star b) \top (a \star c)$ $(a \top b) \star c = (a \star c) \top (b \star c)$	pour tout a, b, c

Groupe

La structure $(E\,,\,\top)$ est un *groupe*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \text{la loi de composition interne } \top \text{ est associative} \\ 2.\ \text{il existe dans } E \text{ un élément neutre pour } \top \\ 3.\ \text{tout élément de } E \text{ possède un symétrique pour } \top \end{cases}$$

Si, de plus, $\top$ est commutative, le *groupe* est dit *abélien* ou *commutatif*. Dans un groupe abélien, la loi de composition est souvent notée $+$.

Espace vectoriel réel

Un ensemble non vide E est un *espace vectoriel réel* s'il est muni

1. d'une loi de composition interne, notée $+$, telle que la structure $(E\,,+)$ est un groupe abélien
2. d'une *loi de composition externe*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda\,,\,u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes

$$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\,\beta) \cdot u$$

$$1 \cdot u = u$$

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$$

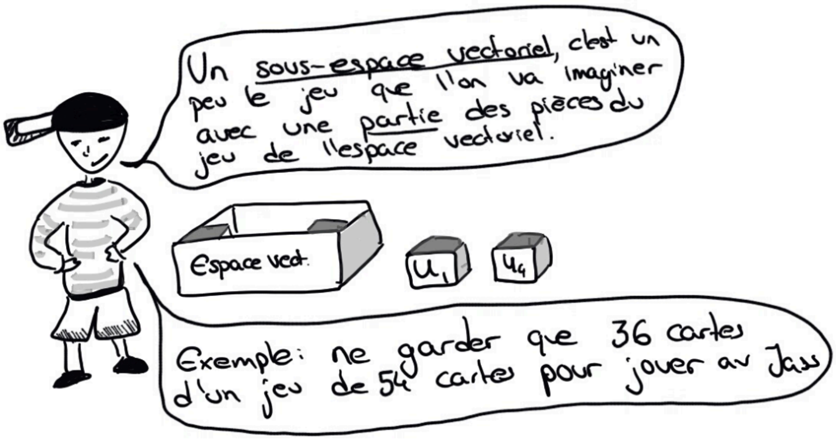
$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$$

quels que soient les nombres réels α, β et les éléments u, v de E.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés *scalaires*.

2.2 Sous-espaces, espaces engendrés

Et si on décidait de laisser quelques pièces d'un jeu ? Cela permettrait de garder les mêmes règles de base mais avec d'autres restrictions en plus.



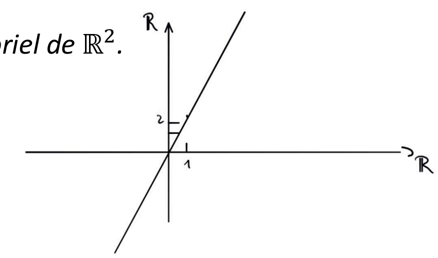
Définition : Un sous-ensemble non-vide F d'un espace vectoriel $(E;\ +;\cdot)$ est un ***sous-espace vectoriel*** de E si $(F;+;\cdot)$ est lui-même un espace vectoriel.

Propriétés :

1. Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel si, pour tout $u, v\ \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   - $u + v \in F$ et
   - $\lambda u \in F$.
2. Tout sous-espace vectoriel F de E contient l'élément neutre o de E, car pour un vecteur u de F, on a :
   - $0 \cdot u \in F$ et
   - $0 \cdot u = o$

Exemple 1 : *On considère un vecteur $\vec{u}$ du plan V_2. L'ensemble $\{\alpha\vec{u}\ |\alpha \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace de V_2*

Exemple 2 : *L'ensemble $\{(t; 2t)|t \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*



Exemple 3 : *L'ensemble des vecteurs $(x; y; z)$ de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant l'équation $2x - 3y + z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$*

Exemple 4 : *Les ensemble E et $\{o\}$ sont les sous-espaces vectoriels triviaux d'un espace vectoriel E.*

Exercice : *Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sous-espaces vectoriels (indication : choisir deux membres de chaque ensemble)*

a) *Avec les opérations usuelles héritées de* $\mathbb{R}^3$*, l'ensemble :*

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}, \mid x + y + z = 1\right\}$$

b) *Sous les opérations usuelles des polynômes,*

$$\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \ \ |a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+\}$$

c) *Avec les opérations héritées*

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ |x + 3y = 4 \ et \ 2x - y = 3 \ et \ 6x + 4y = 10\right\}$$

➢ ***Algèbre Linéaire Série 5 Exercice 2***

2.3 Combinaison linéaire

Définition : On se donne des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E;\ +; \cdot)$. Un vecteur v de E est une ***combinaison linéaire*** des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ s'il peut s'écrire sous la forme

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$$

où les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont des coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 1 : *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $u_1 = (2; 1)$ et $u_2 = (2; -1)$.*

Cherchons une combinaison linéaire pour le vecteur $v = (6; -1)$:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -1 = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 4 = 4\alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

donc $v = u_1 + 2u_2$

Exemple 2 : *Dans l'espace vectoriel P_2, le polynôme $5x^2 - 3x + 2$ est une combinaison linéaire des polynômes $u_1 = x^2, u_2 = x$ et $u_3 = 1$.*

Théorème :

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de E est un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace, noté $L(u_1, u_2, \dots, u_p)$, est ***l'espace engendré*** par $u_1, u_2, \dots, u_p$.

Exemple 3 : *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est engendré par les deux vecteurs $e_1 = (1; 0)$ et $e_2 = (0; 1)$, mais aussi par les trois vecteurs $u_1 = (1; 1), u_2 = (-1; 2)$ et $u_3 = (2; 1)$*

Exemple 4 : *L'ensemble des solutions de l'équation $2x - y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, engendré par le vecteur $u = (1; 2)$*

Exercice : *Décider si le vecteur appartient au sous-espace engendré par la famille de vecteurs appartenant à l'espace mentionné.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $dans\ \mathbb{R}^3$

b) $x - x^3, \{x^2, 2x + x^2, x + x^3\}\ dans\ \wp^3$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ *dans* $\mathcal{M}_2$

➢ ***Algèbre linéaire Série 5 exercice 3 à 6***

2.4 Indépendance linéaire

Définition : On se donne des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E;+;\cdot)$.

Ces vecteurs *sont **linéairement indépendants*** si et seulement si

$$\boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = o \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0}$$

Ce qui signifie que la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition : Les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ sont ***linéairement dépendants*** s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda p$ non tous nuls tels que $\boldsymbol{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = o}$

Exemple 1 :

Les vecteurs $(1;0), (0;1)$ *et* $(1;1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *sont linéairement dépendants car*

$$1\cdot(1;0) + 1\cdot(0;1) - 1\cdot(1;1) = (0;0)$$

Théorème : Des vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ d'un espace vectoriel $(E;+;\cdot)$ sont linéairement dépendants si et seulement si au moins l'un d'eux peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Preuve :

Exemple 2 : *Les vecteurs* $(1;-2;0), (2;1;2)$ *et* $(3;4;4)$ *sont linéairement dépendants car*

$$(3;4;4) = (-1)\cdot(1;-2;0) + 2\cdot(2;1;2)$$

La combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui donne 0 *est donc :*

$$0 = (-1)\cdot(3;4;4) + (-1)\cdot(1;-2;0) + 2\cdot(2;1;2)$$

Exemple 3 :

Les vecteurs $u_1(0;1;1), u_2(1;2;1)$ *et* $u_3(-1;0;2)$ *sont linéairement indépendants.*

En effet, l'équation $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = o$ *amène à résoudre le système :* $\begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

Le système peut s'écrire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} \Leftrightarrow X = A^{-1}B, \text{ si } Det(A) \neq 0$$

Calculons le déterminant du système :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Comme le déterminant du système est différent de 0*, la matrice est inversible.*

La multiplication de A^{-1} *avec le vecteur* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *donnera* $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc la seule solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Dépendance linéaire

Deux vecteurs sont *linéairement dépendants* si l'un est un multiple de l'autre.
Plus généralement, des vecteurs sont *linéairement dépendants* si l'un d'eux s'exprime comme combinaison linéaire des autres.

Deux vecteurs du plan $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement dépendants $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}) = 0$
Trois vecteurs de l'espace $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = 0$

➢ ***Algèbre linéaire Série 5 exercices 7 à 9***

2.5 Bases et dimension

Définition : Si $(E;+;\cdot)$ est un espace vectoriel, une ***base*** de E est un **ensemble ordonné** $\mathcal{B}=(e_1;e_2;\ldots;e_n)$ de vecteurs de E, ***linéairement indépendants*** qui ***engendrent*** E.

Exemple 1 :

Tout vecteur $u=(x;y)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs* $e_1=(1;0)$ *et* $e_2=(0;1)$.

C'est-à-dire : $u=\alpha e_1+\beta e_2$ *donc* $(x;y)=x(1;0)+y(0;1)$

Les vecteurs e_1 *et* e_2 *sont linéairement indépendants.*

Car : $0=\alpha e_1+\beta e_2$ *amène le système :* $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\end{cases}$

L'ensemble ordonné $\mathcal{B}=(e_1;e_2)$ *forme par conséquent une base de* $\mathbb{R}^2$. *Cette base est appelée* ***base canonique***. *Les scalaires* x *et* y *sont les* ***composantes*** *du vecteur* u *dans la base* $\mathcal{B}$. *On représente le vecteur* u *par une* ***matrice-colonne*** U *dont les éléments sont les composantes du vecteur* u*:* $U=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Théorème : Si $(E;\ +;\cdot)$ est un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base E, tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Démonstration (par l'absurde) :

Comme les vecteurs de la base $\mathcal{B}=(e_1;e_2;\ldots;e_n)$ engendrent l'espace E, $tout\ vecteur\ u\in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

Supposons qu'un vecteur u s'écrive de deux manières différentes :

$$u=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n$$

On a alors :

$$0=u-u=(\alpha_1-\beta_1)e_1+(\alpha_2-\beta_2)e_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)e_n$$

Comme $e_1,e_2,\ldots,e_n$ sont linéairement indépendants, tous les coefficients doivent être nuls et donc $\alpha_i=\beta_i,\forall i$

Donc l'écriture de u, comme combinaison linéaire des vecteurs de $(e_1;e_2;\ldots;e_n)$, est unique.

CQFD

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}$, on peut écrire chaque vecteur u de manière unique comme $u = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$. Les réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont les ***composantes*** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$. On peut représenter le vecteur u par la matrice-colonne $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Si U et V sont les matrices-colonne des vecteurs u et v respectivement, par rapport à la même base $\mathcal{B}$, alors la matrice-colonne $u + v$ et la matrice-colonne λU représente le vecteur λu.

Exemple 2 : *D'une manière générale, les vecteurs* $e_1 = (1; 0; \ldots; 0), e_2 = (0; 1; 0; \ldots; 0)$*, … ,* $e_n = (0; \ldots; 0; 1)$ *forment la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exercice *: Montrer que* $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$*est une base de* $\mathbb{R}^4$*.*

Exemple 3 : *L'ensemble ordonné* $(1; x; x^2)$*est une base de* P_2*.*
Relativement à cette base, le polynôme $3x^2 - 7x + 2$ *peut donc être représenté par la matrice-colonne* $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$*.*

Théorème :

Soit E un espace vectoriel et une base $\mathcal{B}$ de E comportant n vecteurs.
Si l'on choisit m vecteurs de E, avec $m > n$,
alors ces vecteurs sont linéairement dépendants.

Corollaire 1 :

Toutes les bases d'un espace vectoriel E ont le même nombre de vecteurs.
Ce nombre est la **dimension de l'espace vectoriel** E et sera noté $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E})$.

Corollaire 2 :

Si $\dim(E) = n$,
Alors tout ensemble ordonné de n vecteurs linéairement indépendants de E est une base de E.

Corollaire 3 :

Si $\dim(E) = n$,
Alors tout ensemble ordonné de n vecteurs qui engendrent E est une base de E.

Exemple 4 : *L'espace vectoriel V_2 des vecteurs du plan est de dimension 2 et l'espace vectoriel V_3 des vecteurs de l'espace est de dimension 3*

Exemple 5 : *L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension n*

Exemple 6 : $dim(P_2) = 3$

Remarques :

- Par convention, l'espace vectoriel $\{o\}$ est de dimension 0

- L'espace vectoriel P de tous les polynômes définis sur $\mathbb{R}$, ne peut pas être engendré par un nombre fini de vecteurs. Il est de dimension infinie.
  Une base possible est $\mathcal{B} = (1; x; x^2; x^3; \dots)$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

On considère un espace vectoriel E de dimension n et un sous-espace vectoriel $F\ de\ E$. On a alors :

1. $\dim(F) \leq \dim(E)$
2. $\dim(F) = dim(E) \Leftrightarrow F = E$

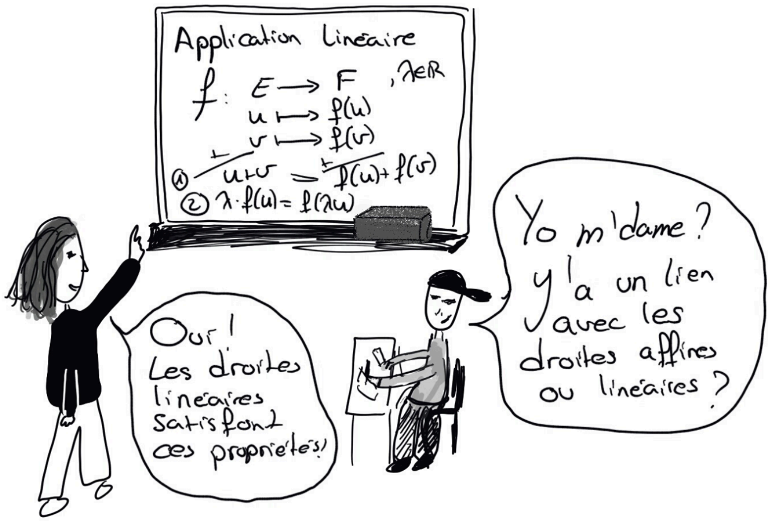
Exemple : Les vecteurs $u = (-2; 1; 0)$ et $v = (1; 0; 1)$ sont linéairement indépendants et engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Ce sous-espace est le plan défini par l'équation $x + 2y - z = 0$

Un sous-espace vectoriel de dimension1 est une droite vectorielle.

Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel.

➢ ***Algèbre linéaire Série 5 exercice 10***

3. Applications linéaires



Que peut-on faire avec deux espaces vectoriels ?

On peut définir un lien : une application linéaire. Mais on va exiger deux propriétés.

3.1 Définition, propriétés, exemples

A travers tous les exemples traités, certains espaces présentaient des similitudes qui laissaient penser qu'ils étaient à peu près identiques. Ainsi en est-il de l'espace des vecteurs lignes de 2 composantes et les vecteurs colonnes de 2 composantes également.

La définition formelle pour définir cette correspondance entre deux espaces permettra de dépasser cet exemple trivial pour donner quelques résultats intéressants.

Exemple :

Commençons par un exemple très simple avant de passer à la définition, celui justement dont nous venons de parler.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cette correspondance préserve les opérations, comme l'addition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et la multiplication par un scalaire :

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \end{pmatrix} \leftrightarrow 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, par cette correspondance $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, les deux opérations sont préservées

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 & a_1 + b_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_0 & r \cdot a_1 \end{pmatrix} \leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_0 \\ r \cdot a_1 \end{pmatrix}$$

Définition :

Soit E et F, deux espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une ***application linéaire***[3] si et seulement si:

1) $\forall u, v \in E$, on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E$, on a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Remarque : On peut regrouper ces deux propriétés en disant qu'une application est linéaire si elle satisfait l'identité :

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E$$

Exemple : Vérifions que la droite linéaire (étudiée en première année) est bien une application linéaire.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{cases} \quad avec\ a \in \mathbb{R}$$

Propriété : Si f est une application linéaire de E vers F,
alors l'image par f du vecteur nul de E est le vecteur nul de F.

Preuve : On a : $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$.

Remarque : La réciproque est fausse.

[3] Une application linéaire est aussi appelée un ***homomorphisme*** (homos= semblable, morphê=forme)

Exemple 1 : $f\big((x_1;x_2)\big) = (x_1 + x_2; -x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire car :

1) $f\big((u_1;u_2) + (v_1;v_2)\big) = f\big((u_1 + v_1; u_2 + v_2)\big) = \big((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2); -(u_2 + v_2)\big)$
$= (u_1 + u_2 + v_1 + v_2; -u_2 - v_2)$

et $f\big((u_1;u_2)\big) + f\big((v_1;v_2)\big) = (u_1 + u_2; -u_2) + (v_1 + v_2; -v_2) = (u_1 + u_2 + v_1 + v_2; -u_2 - v_2)$

2) $f\big(\lambda(u_1;u_2)\big) = f\big((\lambda u_1; \lambda u_2)\big) = (\lambda u_1 + \lambda u_2; -\lambda u_2)$

et $\lambda f\big((u_1;u_2)\big) = \lambda(u_1 + u_2; -u_2) = (\lambda u_1 + \lambda u_2; -\lambda u_2)$

Lorsqu'il s'agit d'une AL, il faut prouver que les deux propriétés fonctionnent.
(pas d'exemple numérique)

Exemple 2 : $g\big((x_1;x_2)\big) = (x_1; x_2^2)$ $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas une application linéaire car :

$g\big((1;1)\big) = (1;1)$, $g((2;2) = (2;4)$, $g\big((1;1)\big) + g\big((2;2)\big) = (3;5)$
$g\big((1;1) + (2;2)\big) = g\big((3;3)\big) = (3;9)$

Lorsqu'il ne s'agit **pas** d'une AL, il suffit de prendre un **contre-exemple numérique** pour le montrer.

Exercice : Est-ce que l'application $f: x \longmapsto 3x - 5$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire ?

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Application linéaire

On note E et F deux espaces vectoriels.
Une application f de E vers F est *linéaire* si, quels que soient les éléments u et v de E et le scalaire λ, les deux conditions suivantes sont remplies :

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

➢ ***Algèbre linéaire Série 6 Exercice 1***

3.2 Matrice associée

Théorème : Une application linéaire f de E dans F est complètement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel de E.

Il suffit donc de donner l'image des vecteurs d'une base de l'ensemble de départ pour définir complètement une application linéaire. Cela peut être fait à l'aide d'une matrice.

Exemple 1 : Soit $f: (x_1; x_2) \longmapsto (-x_1 + 3x_2; 2x_1 - 6x_2; x_1 - 3x_2)$

En travaillant dans les bases canoniques, on peut écrire matriciellement l'image par l'application f d'un vecteur $(x_1; x_2)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 6x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}}_{Y}$$

On observe que les colonnes de la matrice A sont constituées des composantes des images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$f\big((1;0)\big) = (-1;2;1) \text{ et } f\big((0;1)\big) = (3;-6;-3)$$

La matrice A est appelée matrice associée à l'application f relativement aux bases canoniques.

Exemple 2 : Soit $f: (x_1; x_2) \longmapsto (2x_1; x_1 + 3x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$f\big((1;0)\big) = (2;1)$ et $f\big((0;1)\big) = (0;3)$

On écrit $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

On peut aussi calculer : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f\big((4;-2)\big) = (8;-2)$

Exemple 3 : Soit $g: (x_1; x_2; x_3) \longmapsto (x_1 - 2x_2; x_1 + x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

$g\big((1;0;0)\big) =$ $\qquad$ $g\big((0;1;0)\big) =$ $\qquad$ $g\big((0;0;1)\big) =$

$M_g =$

Matrice associée à une application linéaire

Si on choisit une base de E et une base de F, les colonnes de la matrice M associée à f sont les composantes des images par f des vecteurs de la base de E, exprimées dans la base de F.

On note X et Y les matrices-colonne des composantes des vecteurs x et y.

$\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow Y = MX}$

➤ ***Algèbre linéaire Série 6 Exercice 2 à 4***

3.3 Noyau d'une application linéaire

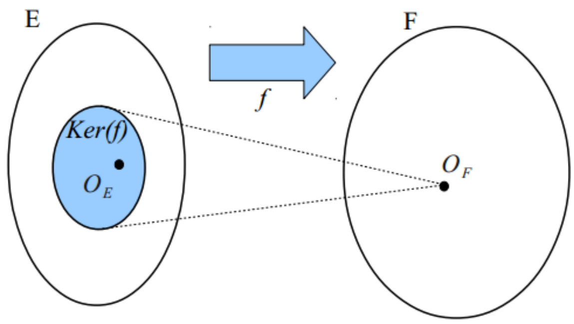
Définition :

Soit une application linéaire f de E dans F. Le ***noyau***[4] ***de f***, noté $\boldsymbol{Ker(f)}$, est l'ensemble de tous les vecteurs de E dont l'image par f est le vecteur nul de F.

$$Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

Autrement dit : Le noyau d'une application linéaire f de E dans F est la pré-image de o_F.

Illustration :



Exemple 1 : Soit $f\big((x_1; x_2; x_3)\big) = (x_1 + 2x_2 - x_3; x_2 + x_3; x_1 + x_2 - 2x_3)$

<u>Déterminons le noyau de f :</u>

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ dans la deuxième équation, on trouve: $x_3 = -x_2$ que nous substituons dans les deux autres:

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = -x_2 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ donc $x_1 = -3x_2$ ainsi: $(x_1; x_2; x_3) = (-3x_2; x_2; -x_2) = x_2(-3; 1; -1)$

Donc : $Ker(f) = \{(-3\lambda; \lambda; -\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ (dimension 1, c'est une droite)

Exercice : Montrer que le noyau de f: $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1; x_2) \mapsto (-x_1 + 3x_2;\, 2x_1 - 6x_2\,;\, x_1 - 3x_2) \end{matrix}$ est $Ker(f) = \{\lambda(3; 1) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

➢ ***ALS6 ex 5***

[4] L'abréviation « ker » vient du mot anglais « kernel » (qui signifie « noyau »)

3.4 Image d'une application linéaire

Avant de définir l'ensemble image d'une application linéaire, nous allons énoncer deux résultats nécessaires :

Théorème : L'image d'un vecteur $(x_1; x_2)$ est déterminée si l'on connaît les images des deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Preuve : Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire, alors

$$f\big((x_1; x_2)\big) = f\big((x_1; 0) + (0; x_2)\big)$$
$$= f\big((x_1; 0)\big) + f\big((0; x_2)\big)$$
$$= f\big(x_1(1; 0)\big) + f\big(x_2(0; 1)\big)$$
$$= x_1 f\big((1; 0)\big) + x_2 f\big((0; 1)\big)$$

De manière générale :

Théorème : l'image par une application linéaire f d'une combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire des images de ces vecteurs, avec les mêmes coefficients.

Explication : Lorsqu'un vecteur x de E est donné par ses composantes dans une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; \dots; e_n)$ de E, il suffit de connaître les images $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour déterminer celle du vecteur x. En effet, comme f est linéaire, on a :

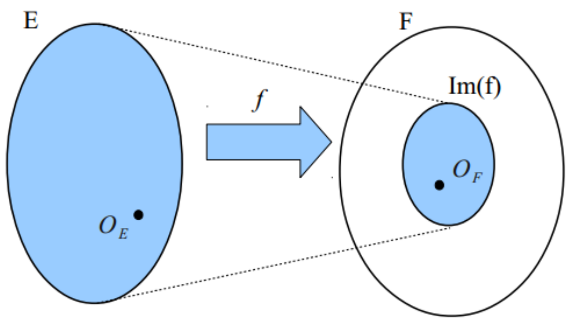
$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

Définition : Soit une application linéaire f de E dans F.

L'***image de f***, notée $\boldsymbol{Im(f)}$, est l'ensemble de toutes les images par f des vecteurs de E.

$$Im(f) = \{f(x) \in F | x \in E\} = \{y \in F | \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x)\}$$

Illustration :



Reprenons l'exemple 1 : Soit $f\big((x_1; x_2; x_3)\big) = (x_1 + 2x_2 - x_3; x_2 + x_3; x_1 + x_2 - 2x_3)$

<u>Déterminons l'image de f:</u>

$f\big((1;0;0)\big) =$ $\qquad$ $f\big((0;1;0)\big) =$ $\qquad$ $f\big((0;0;1)\big) =$

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

L'image de f est le sous-espace vectoriel engendré par $(1;0;1), (2;1;1)$ et $(-1;1;-2)$

Comme $(1;0;1)$ et $(2;1;1)$ ne sont pas multiples[5], ils engendrent un plan vectoriel.

Est-ce que $(-1;1;-2)$ est une combinaison linéaire des deux autres vecteurs ?

$$(-1;1;-2) = \alpha(1;0;1) + \beta(2;1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ \beta = 1 \\ \alpha + \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2 = -1 \\ \beta = 1 \\ \alpha + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

Comme $(-1;1;-2)$ est une combinaison linéaire, on peut alors écrire que

$Im(f) = L\big((1;0;1),(2;1;1)\big) = \{\alpha(1;0;1) + \beta(2;1;1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ qui est de dimension 2.

Il s'agit donc d'un plan.

Cela signifie qu'il s'agit de l'espace engendré par les combinaisons linéaires des deux vecteurs $(1;0;1)$ et $(2;1;1)$.

Exercice : Déterminer l'image de $f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x_1;x_2) \mapsto (-x_1+3x_2;\, 2x_1-6x_2\,;\, x_1-3x_2) \end{array}$

$Im(f) = \{\lambda(-1;2;1) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

- ***ALS6 ex 6 et 7***

[5] c'est-à-dire: $(1;0;1) \neq k \cdot (2;1;1)$

Propriété 1 :

a) Le vecteur nul de F appartient à $Im(f)$.
b) Le vecteur nul de E appartient à $Ker(f)$.

Preuve : On a $f(0_E) = 0_F$

donc $0_F \in Im(f)$

et donc $0_E \in Ker(f)$.

Propriété 2* :

a) $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
b) $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve a) : Prenons $v_1, v_2 \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $v_1 + v_2 \in Im(f)$ et $\lambda v_1 \in Im(f)$

Par définition de $Im(f)$, $\exists x_1, x_2 \in E$ tels que $v_1 = f(x_1)\ et\ v_2 = f(x_2)$.

Comme f est linéaire, on a donc :

$$v_1 + v_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in Im(f)$$

$$\lambda v_1 = \lambda f(x_1) = f(\lambda x_1) \in Im(f)$$

Preuve b) : Prenons $x_1, x_2 \in Ker(f), \lambda \in \mathbb{R}$

Comme f est linéaire, on a : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0_F + 0_F = 0_F$

$$f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) = \lambda 0_F = 0_F$$

donc $x_1 + x_2 \in Ker(f)$ et $\lambda x_1 \in Ker(f)$

Définition : la dimension de $Im(f)$ est appelée ***rang de l'application f***.

la dimension de $Ker(f)$ est appelée la ***nullité de f***

Propriété 3 :

L'espace vectoriel $Im(f)$ est engendré par les images des vecteurs d'une base de E.

Preuve : Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété de la linéarité de f.

Propriété 4 :

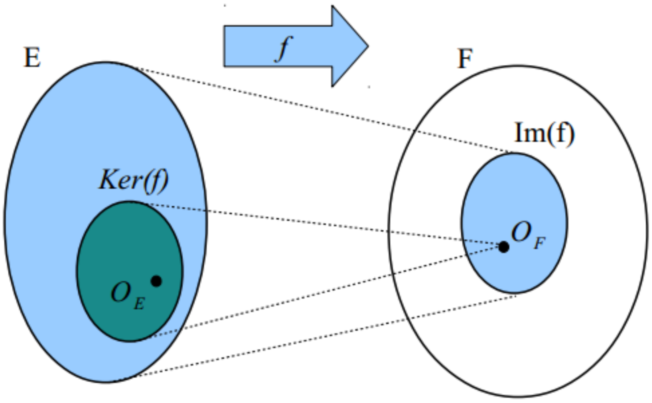
L'application f est surjective si et seulement si $\dim(Im(f)) = \dim(F)$.

Preuve : On applique la propriété $\dim(F) = dim(E) \Leftrightarrow F = E$ de la dimension d'un sous-espace vectoriel.

Théorème du rang :

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et f une application linéaire de E dans F,

Alors $\dim(E) = \dim\big(Ker(f)\big) + \dim\,(Im(f))$



Exemple 2 : Soit $f : (x_1 ; x_2) \longmapsto (-x_1 + 3x_2 ; 2x_1 - 6x_2 ; x_1 - 3x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

- Calcul de $Ker(f)$:

- Calcul de $Im(f)$:

- Vérifier le théorème du rang :

- ***ALS6 ex 5 à 7***

3.5 Opérations

Théorème :

Si f et g sont deux applications linéaires de E vers F et λ un nombre réel,

Alors λf et $f+g$ sont aussi des applications linéaires de E vers F

Exemple : On donne deux applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$
$f:(x;y;z) \longmapsto (2x+z; y-3z)$ et $g:(x;y;z) \longmapsto (x+2y-z; x+y)$

On vérifie rapidement que les applications

$$3f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) & \longmapsto & (6x+3z; 3y-9z) \end{array}$$

$$et \quad f+g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) & \longmapsto & (3x+2y; x+2y-3z) \end{array}$$

sont elles aussi linéaires.

Les matrices associées sont :

$M_f =$ $\qquad$ $M_g =$

$M_{3f} =$ $\qquad$ $M_{f+g} =$

Calculons : $M_f + M_g =$ $\qquad$ $et\ 3 \cdot M_f =$

On peut observer le théorème suivant :

Théorème :

Soit f et g deux applications linéaires de E vers F, on note M_f et M_g les matrices qui leur sont associées et λ un nombre réel.

1) La matrice associée à λf est la matrice λM_f

2) La matrice associée à $f+g$ est la matrice $M_f + M_g$

Théorème :

Si $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$ sont deux applications linéaires.
Notons M_f et M_g les matrices associées.

Alors 1) la composée $g \circ f : E \rightarrow G$ est aussi une application linéaire.
2) La matrice associée à $g \circ f$ est la matrice $M_g \cdot M_f$

Exemple :

On considère les deux applications linéaires suivantes :

$$f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) \longmapsto (x+y; x-2y-z) \end{array} \quad et\ g: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y) \longmapsto (x; 2x+3y) \end{array}$$

La composée de l'application linéaire est :

$$g \circ f: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x;y;z) \longmapsto \big(x+y; 2(x+y)+3(x-2y-z)\big) = (x+y; 5x-4y-3z) \end{array}$$

Les matrices associées sont :

$M_f =$

$M_g =$

$M_{g \circ f} =$

$M_g \cdot M_f =$

➢ ***Algèbre linéaire Série 6 Exercice 8***

4. Endomorphismes

4.1 Définition et exemples

Définition :

Un ***endomorphisme*** de E est une application linéaire d'un espace vectoriel E vers E.

Remarque : Cette définition implique que si E est de dimension n, alors la matrice d'un endomorphisme de E est une **matrice carrée d'ordre n**.

Exemple 1 :

L'application définie par $f\big((x;y)\big) = (y;x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En effet, cette application est linéaire et elle est définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

La matrice associée est : $M_f =$

Exemple 2 :

L'application définie par $f\big((x;y;z)\big) = (y+z;x+z;x+y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Sa matrice relativement à la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Définition :

Soit f un endomorphisme f d'un espace vectoriel E.

Si f est bijective, alors sa **réciproque** ${}^r f$ est aussi un endomorphisme bijectif de E. On a alors

$$f \circ {}^r f = {}^r f \circ f = id_E$$

Un ***automorphisme*** de E est un endomorphisme de E bijectif.

Exemple 3 : L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f\big((x;y)\big) = (-y;x)$ est bijectif.

Car :

Sa réciproque est l'endomorphisme : ${}^r f\big((x;y)\big) = (y;-x)$

Car :

Théorème : Soit f un endomorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes

1) L'endomorphisme f est bijectif
2) La matrice associée à f est inversible
3) La dimension de $Ker(f)$ est zéro
4) La dimension de $Im(f)$ est égale à la dimension de E.

Exemple 4 :

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, défini par sa matrice $M_f = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, relativement à la base canonique.

On observe que $Det(M_f) = -6 + 5 = -1 \neq 0$ L'endomorphisme est donc bijectif.

la matrice de ^{r}f est $M_f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

On peut donc déterminer l'application réciproque de f.

La matrice inverse de la matrice associée à un automorphisme est la matrice associée à l'application réciproque.

➢ ***Algèbre linéaire Série 6 Exercices 9 à 15***

Table des matières