Analyse Série 1

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

a) Calculer $f(1{,}8), f(1{,}9), f(1{,}99), f(1{,}999)$
b) Calculer $f(2{,}2), f(2{,}1), f(2{,}01), f(2{,}001)$
c) Sans autre calcul, peut-on prédire $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 2} f(x)$?

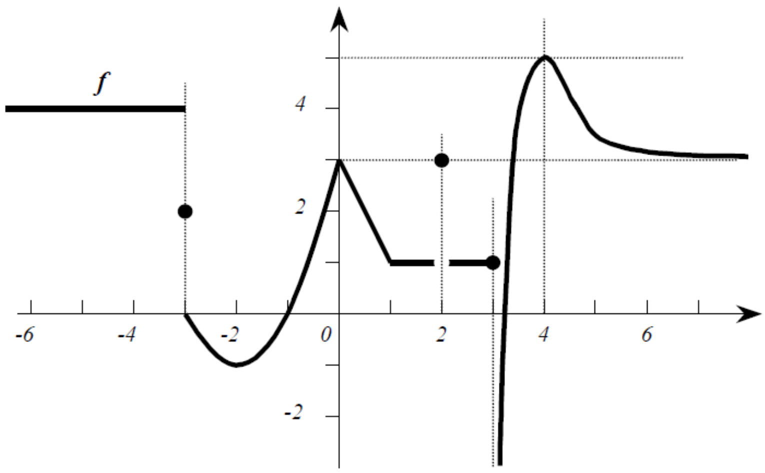
Exercice 2 :

En utilisant **uniquement la calculatrice**, essayer de déterminer si chacune des limites suivantes existe, puis, si oui, sa valeur.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ [x est mesuré en radians]
d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

Exercice 3 :

Voici la représentation graphique d'une fonction réelle f de domaine $D_f = \mathbb{R}$



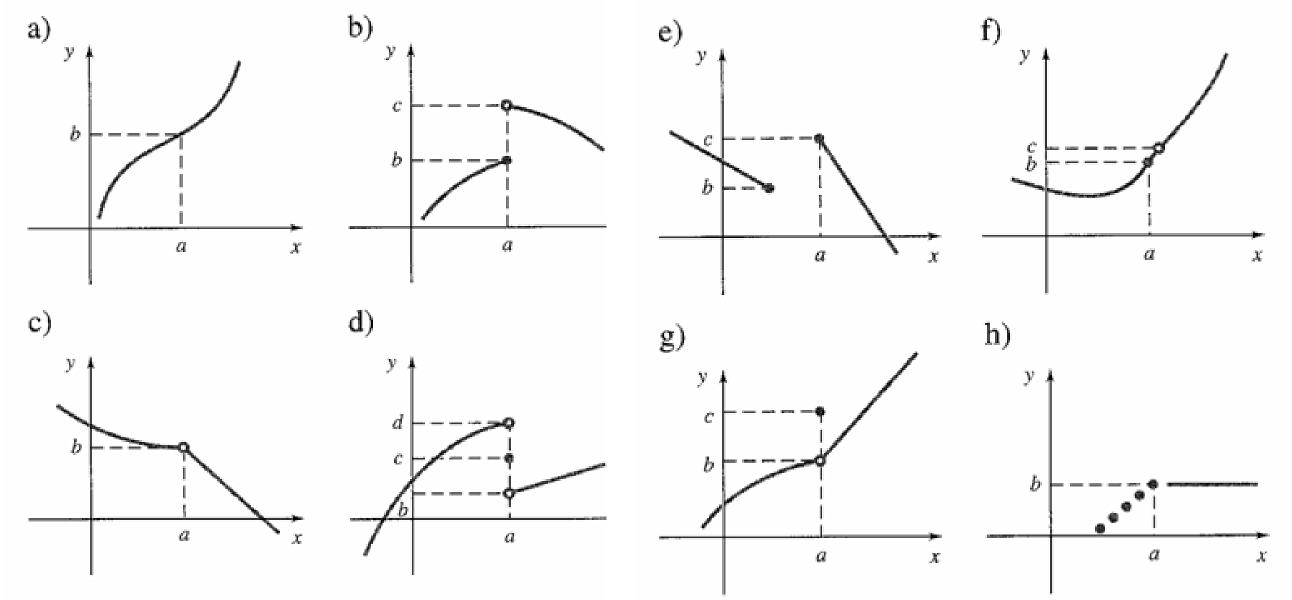
Déterminez les expressions suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} f(x) =$
b) $f(0) =$
c) $\lim_{x\to -1} f(x) =$
d) $f(-20) =$
e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$
f) $\lim_{x\to -3^-} f(x) =$
g) $\lim_{x\to -3^+} f(x) =$
h) $\lim_{x\to -3} f(x) =$
i) $f(-3) =$
j) $\lim_{x\to 3^-} f(x) =$
k) $\lim_{x\to 3^+} f(x) =$
l) $\lim_{x\to 3} f(x) =$
m) $f(3) =$
n) $\lim_{x\to 1} f(x) =$
o) $\lim_{x\to 2} f(x) =$
p) $\lim_{x\to 4} f(x) =$
q) $\lim_{x\to 47{,}8} f(x) =$
r) $\lim_{x\to \infty} f(x) =$

Exercice 4 :

Pour chacune des fonctions suivantes définies par un graphique, déterminer

$$f(a),\ \lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x)\ et\ \lim_{x\to a} f(x)$$



Exercice 5 : Pour chacune des fonctions ci-dessous:

a) Représentez f, après avoir simplifié, si possible, l'écriture algébrique de f.

b) Décidez à l'aide de a), si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existent.

c) Décidez si f est continue en 0.

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{2x}, si\ x < 0 \\ 2x - \frac{3}{2}, si\ x \geq 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, si\ x < 0 \\ 2, si\ x = 0 \\ x - 1, si\ x > 0 \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+5x}{|x|}, si\ x \neq 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 6 :

a) Expliquer ce que veut dire $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 8$

b) Dans cette situation, est-il possible que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe ?

Exercice 7 :

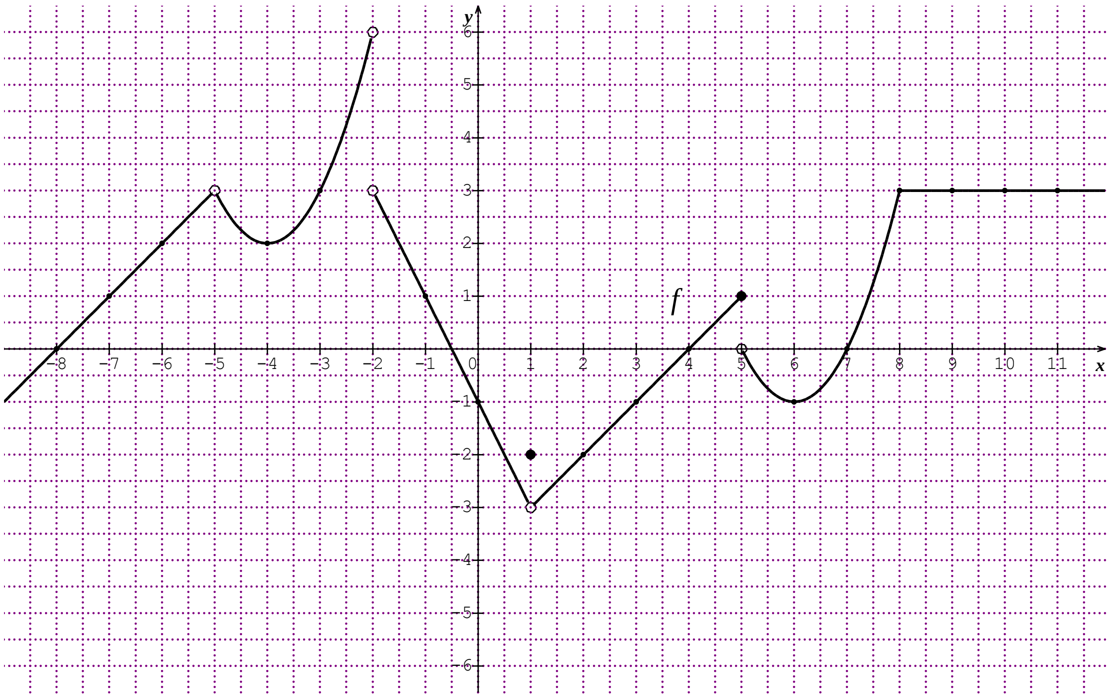
Sur trois graphiques différents, représentez les trois fonctions suivantes en respectant les conditions :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$; $f(-5) = 2{,}5$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$; $f(0) = 4$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -0{,}5$

b) $g(-7) = -3$; $\lim\limits_{x\to -7} g(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = 4$ et $\lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 3$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \infty$; $h(1) = -3$; $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = 2{,}5$ et $\lim\limits_{x\to \infty} h(x) = 0$

Exercice 8 : f est la fonction définie graphiquement ci-dessous.



a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Déterminer la limite, si elle existe, de f en a pour les valeurs de a suivantes:
(si la limite n'existait pas, préciser les limites à droite et à gauche)

$$a = -5, a = -2, a = 0, a = 1, a = 5, a = 8 \; et \; a = 17$$

Exercice 9 : Tracer le graphe d'une fonction f telle que:

1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5, \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \quad et \; f(2) = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ et $f(2) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ et f n'est pas définie en 2.

Exercice 10 :

Représenter graphiquement une fonction f vérifiant simultanément toutes les conditions suivantes :

- $D_f =]-5; 5[\setminus \{4\}$
- $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = -1$
- f n'admet pas de limite en 0
- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$ et $f(-2) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -2$

Exercice 11 :

$$f(x) = \begin{cases} -3\,, si\ x < -2 \\ 1 - x^2, si - 2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, si\ 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x - 2; si\ x > 3 \end{cases}$$

Quelle est la limite (éventuellement à gauche et à droite) de f en -2, en 0 et en 3 ?

Exercice 12 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, si\ x \leq 3 \\ ax - 1, si\ x > 3 \end{cases}$$

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

b) Exprimer, en fonction de a, la limite à droite de f en 3

c) Quelle valeur faut-il donner à a pour que f admette une limite en 3 ?

Exercice 13 :

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer son graphe (taille 7 cm sur 7 cm, échelle 1 $unité = 0{,}5\ cm$) puis déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Si la limite n'existe pas, préciser les limites à droite et à gauche.

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}\,, si\ x \neq 3 \\ 2, si\ x = 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x + 2, si\ x < 3 \\ -x + 5, si\ x \geq 3 \end{cases}$

Exercice 14 :

Tracer le graphe (taille 10 cm sur 10 cm, échelle 1 $unité = 1\ cm$) de la fonction f puis déterminer, si elles existent, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\underset{x \to 3}{lin}\ f(x)$. Si une de ces limites n'existe pas, préciser les limites à droite et à gauche.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x, si\ x < 0 \\ x^2 - 2x, si\ 0 \leq x \leq 3 \\ -2, si\ x > 3 \end{cases}$$

Corrigé Analyse Série 1:

Exercice 1:

a) $f(1{,}8) = 3{,}8; f(1{,}9) = 3{,}9; f(1{,}99) = 3{,}99; f(1{,}999) = 3{,}999$

b) $f(2{,}2) = 4{,}2; f(2{,}1) = 4{,}1; f(2{,}01) = 4{,}01; f(2{,}001) = 4{,}001$

c) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

Exercice 2:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0{,}\overline{6}$

d) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0{,}35$

Exercice 3:

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 3 = f(0)$

b) $f(0) = 3$

c) $\lim_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1)$

d) $f(-20) = 4$, probablement ?!?

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$, probablement ?!?

f) $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 4 \neq f(-3)$

g) $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 0 \neq f(-3)$

h) $\lim_{x\to -3} f(x)$ n'existe pas, car la limite à gauche est différente de la limite à droite.

i) $f(-3) = 2$

j) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$

k) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

l) $\lim_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas, car la limite à gauche est différente de la limite à droite.

m) $f(3) = 1$

n) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$

o) $\lim_{x\to 2} f(x) = 1 \neq f(2)$

p) $\lim_{x\to 4} f(x) = 5 = f(4)$

q) $\lim_{x\to 47{,}8} f(x) = 3$, probablement ?!?

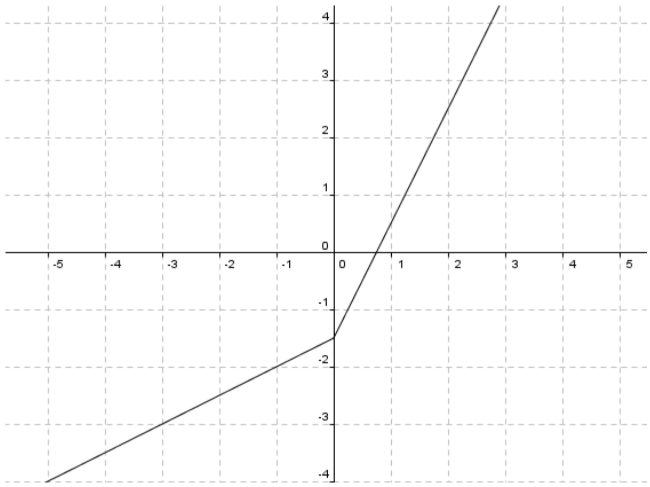
r) $\lim_{x\to \infty} f(x) = 3$, probablement ?!?

Exercice 4:

	$f(a)$	$\lim_{x\to a^-} f(x)$	$\lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a} f(x)$
a)	b	b	b	b
b)	b	b	c	N'existe pas
c)	N'existe pas	b	b	b
d)	c	d	b	N'existe pas
e)	c	Aucun sens	c	Aucun sens
f)	b	b	b	b
g)	c	b	b	b
h)	b	Aucun sens	Aucun sens	Aucun sens

Exercice 5:

1) $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x^2-3x}}{\boldsymbol{2x}}, \boldsymbol{si\ x} < 0 \\ \boldsymbol{2x - \frac{3}{2}, si\ x \geq 0} \end{cases}$



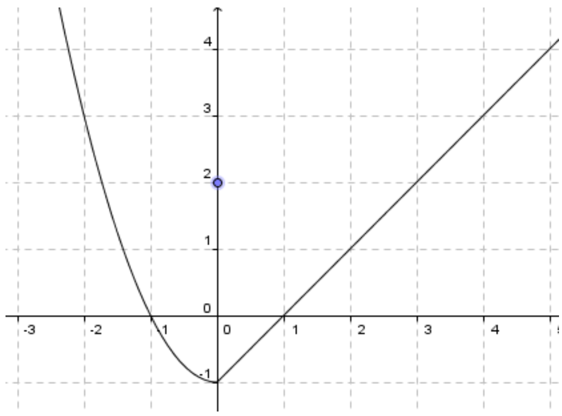
a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, si\ x < 0 \\ 2x - \frac{3}{2}, si\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$

c) continue



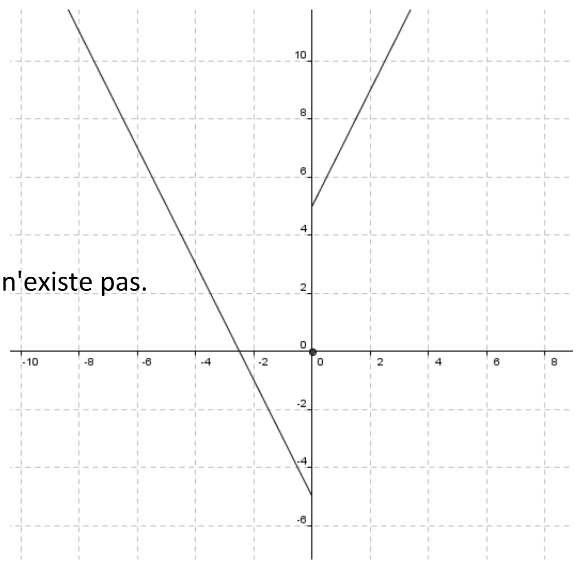
2) $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 1, si\ x} < 0 \\ \boldsymbol{2, si\ x = 0} \\ \boldsymbol{x - 1, si\ x} > 0 \end{cases}$

a) pas de simplification

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

c) pas continue

3) $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{2x^2+5x}}{\boldsymbol{|x|}}, \boldsymbol{si\ x \neq 0} \\ \boldsymbol{0, si\ x = 0} \end{cases}$



a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, si\ x > 0 \\ -2x - 5, si\ x < 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$

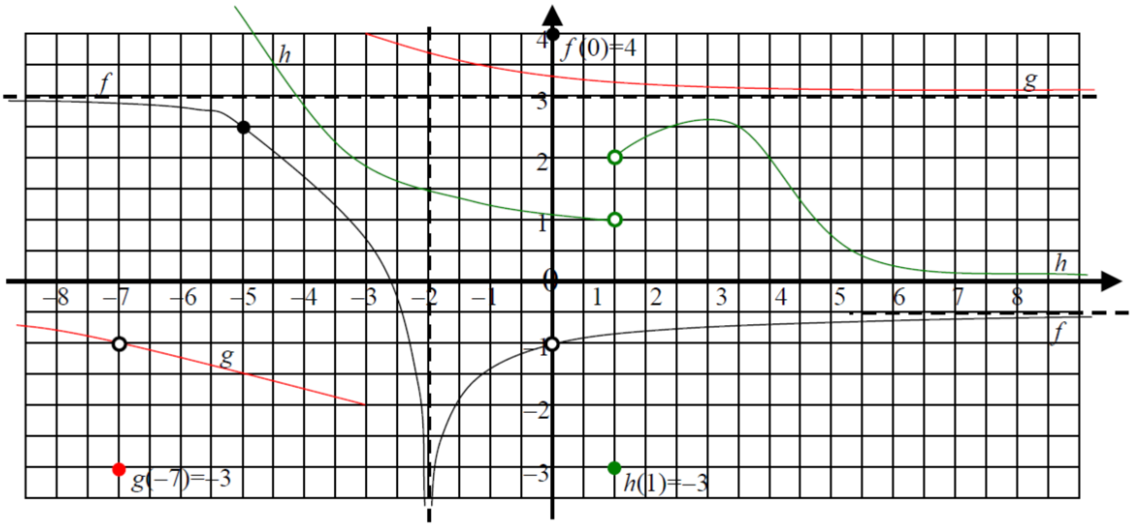
b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 5$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

c) pas continue en 0

Exercice 6:

b) non.

Exercice 7:



Exercice 8:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; -2\}$

b) $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 6$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 1 \; et \; \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 17} f(x) = 3$

Exercice 11:

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\frac{1}{2}$

Exercice 12:

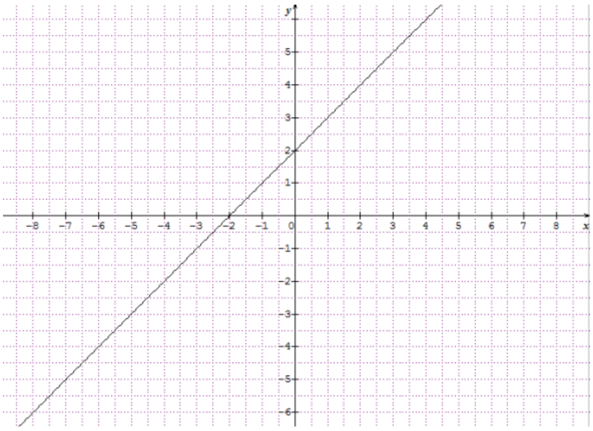
a) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 7$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3a - 1$

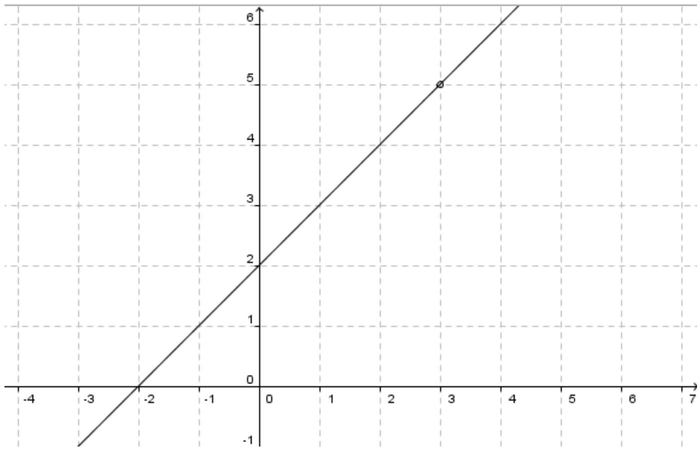
c) $a = \frac{8}{3}$

Exercice 13:

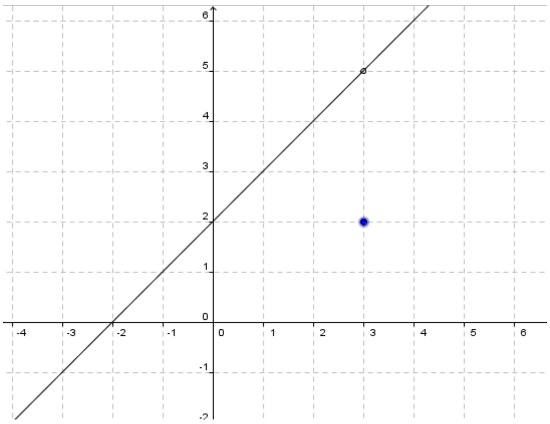
a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$



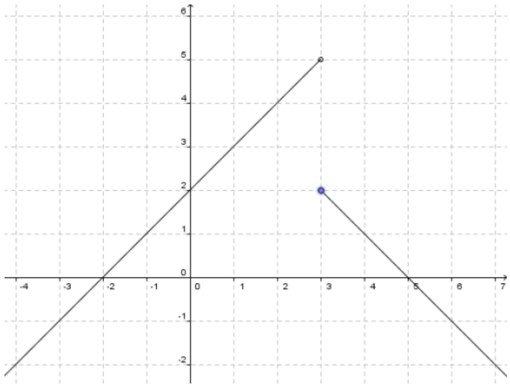
b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$



c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$



d) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$



Exercice 14:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3 \quad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -2$