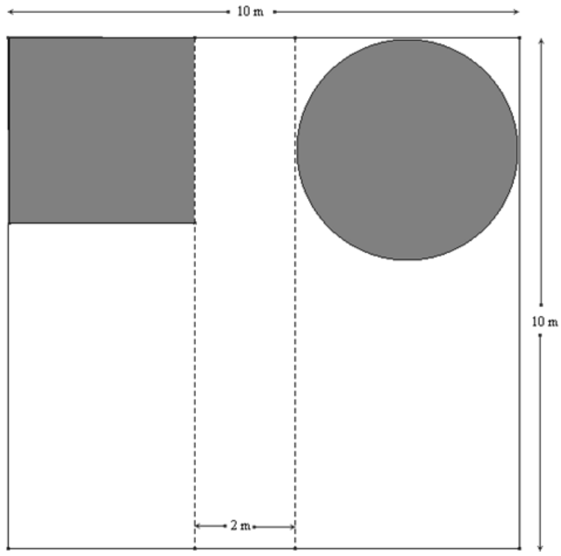
Analyse Série 10

Ne rien écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles à part !

Exercice 1 :



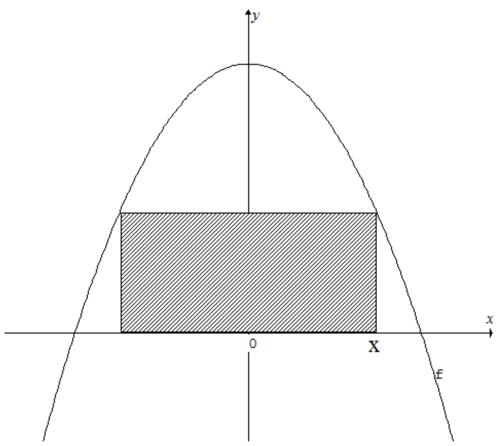
Un jardin de 10 mètres de côté doit être traversé par une allée de 2 mètres de large.

Dans ce jardin, on désire implanter de part et d'autre de l'allée une rotonde circulaire et un bassin carré selon le croquis ci-contre.

Quelles doivent être les dimensions de ces constructions pour qu'elles occupent une superficie minimale ?

Exercice 2 :

La fonction esquissée ci-contre est $f(x) = 5 - x^2$ et on considère le rectangle hachuré



a) Esquisser le rectangle lorsque $x = 1$ et $x = 2$

b) Exprimer la longueur de la base, la hauteur puis l'aire A du rectangle en fonction de x

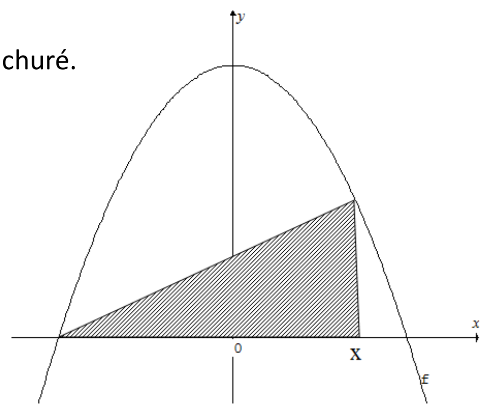
Nous supposerons x positif.

c) Calculer cette aire lorsque : $x = 1, x = 2$ et $x = \sqrt{5}$

d) Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'aire soit maximale ?

Exercice 3 :

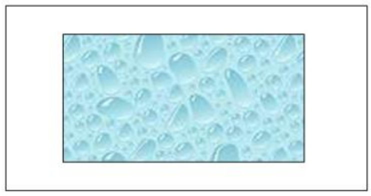
La fonction esquissée ci-contre est $4 - x^2$ et on considère le triangle hachuré.



a) Calculer l'aire A du triangle pour $x = -1, x = 1$ et $x = 2$

b) Quelle valeur faut-il donner à x
pour que l'aire du triangle soit maximale ?

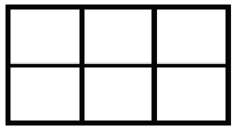
Exercice 4 :



Un propriétaire souhaite utiliser $216\ m^2$ de son jardin pour y placer une piscine rectangulaire bordée d'un dallage dont la largeur est de $2\ m$ ou $3\ m$ selon le croquis ci-contre.

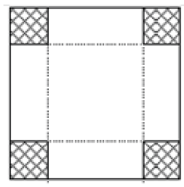
Quelles doivent être les dimensions de la construction pour que la piscine soit la plus grande possible ?

Exercice 5 :



On dispose de $288\ m$ de clôture grillagée pour construire 6 enclos pour un zoo selon le plan ci-contre.
Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?

Exercice 6 :



Avec une plaque de carton carrée de $45\ cm$ de côté, on fabrique une boite sans couvercle de volume maximale de découpant dans chacun de ses coins un carré de $x\ cm$ de côté.

Déterminer les dimensions de la boite et son volume.

Exercice 7 :

Un fabriquant de produits alimentaires veut mettre sur le marché un nouveau légume. Il envisage de le mettre dans des boîtes de conserves cylindriques de $3\ dl$

a) Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour qu'il utilise le moins de métal possible ?
b) Montrer que, quelque soit le volume de la boîte cylindrique, il convient de fabriquer un cylindre dont la hauteur est égale à son diamètre si l'on veut utiliser le moins de métal possible.

Exercice 8 :

a) Parmi toutes les paires de nombres dont la somme vaut 20, déterminer celle pour laquelle le produit des deux nombres est maximal.

b) Parmi tous les rectangles dont le périmètre vaut 120 cm, déterminez celui dont la surface est maximale.

c) Parmi tous les triangles rectangles dont l'hypoténuse vaut 40, déterminez celui dont l'aire est maximale.

d) Un rectangle est inscrit dans un demi-cercle de rayon 20. Déterminez les dimensions du rectangle pour que son périmètre soit maximal.

e) Parmi toutes les boîtes cylindriques dont le volume vaut 0,33 litres, déterminez celle dont l'aire totale est minimale.

Solutions Analyse Série 10 :

Exercice 1 :

rayon de la rotonde: $R = \frac{16}{4+\pi} \cong 2{,}24\ m$ et côté du bassin: $c = \frac{8\pi}{4+\pi} \cong 3{,}52\ m$

Exercice 2 :

b) $base(x) = 2x$ $\quad hauteur(x) = f(x) = 5 - x^2$ $\quad aire = A(x) = -2x^3 + 10x$

c) $A(1) = 8$; $\quad A(2) = 4$; $\quad A(\sqrt{5}) = 0$ $\quad$ d) $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

Exercice 3 :

a) $A(-1) = \frac{3}{2}; A(1) = \frac{9}{2}; A(2) = 0$ $\quad$ b) $x = \frac{2}{3}$ $\quad$ remarque : $A(x) = \frac{1}{2}(x+2)(4-x^2)$

Exercice 4 :

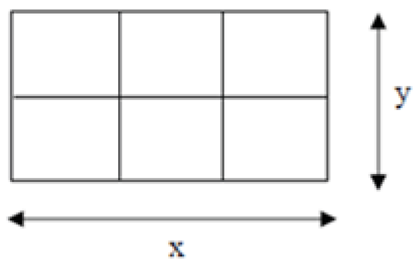
Notons x la longueur de la construction et A l'aire de la piscine.

$A(x) = (x-6)\left(\frac{216}{x} - 4\right) = 240 - 4x - \frac{1296}{x}$ $\quad$ donc $A'(x) = \frac{1296}{x^2} - 4$

La construction doit mesurer 18 m de long sur 12 m de large.

Exercice 5 :

Notons $x = longueur\ de\ l'enclos$ et $y = largeur\ de\ l'enclos$



On a: $3x + 4y = 288 \Leftrightarrow y = \frac{288-3x}{4}$

donc: $A(x;y) = xy \Leftrightarrow A(x) = x\left(\frac{288-3x}{4}\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 72x$

$A'(x) = -\frac{3}{2}x + 72 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{144}{3} = 48$

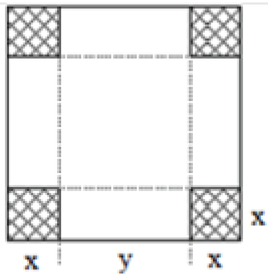
x	0		48		96
A'(x)		−	0	+	
A(x)		↗	Max 1728	↘	

$y = \frac{288-3x}{4} = 36$

Pour maximiser l'aire de l'enclos, les dimensions doivent être de 48 m pour la longueur et 36 m pour la largeur. L'aire maximale est alors de 1728 m^2

Exercice 6 :

Notons : $x = mesure\ du\ côté\ du\ petit\ carré$ à $enlever$ et $y = largeur\ du\ fond\ de\ la\ boite\ carrée$



On a: $2x + y = 45 \Leftrightarrow y = 45 - 2x$
Donc $V(x;y) = xy^2$ donc $V(x) = x(45-2x)^2 = 4x^3 - 180x^2 + 2025x$
$V'(x) = 12x^2 - 360x + 2025$
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}\ ou\ x = \frac{45}{2}$

x	0	15/2		45/2
V'(x)	+	0	–	0
V(x)	↗	max	↘	0

$V\left(\frac{15}{2}\right) = 30^2 \cdot \frac{15}{2} = 6750\ cm^3$

Pour que le volume soit maximal, les dimensions de la boite doivent être de 30 cm pour la largeur du fond et $\frac{15}{2} = 7{,}5\ cm$ pour la hauteur.

Exercice 7 :

a) $3dl = 300\ cm^3$ $V(r;h) = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{300}{\pi r^2}$ $A(r) = 2\pi r^2 + \pi r \cdot \frac{300}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}$

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{600}{r^2} ? \frac{4\pi r^2 - 600}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \cong 3{,}63\ cm\ si\ r \neq 0 \Rightarrow h \cong 7{,}26\ cm$$

r	0	3,63	
A'(r)	+	0	–
A(r)	↘	min 248	↗

Pour utiliser le moins de métal possible, le rayon des boites de conserves cylindriques doit être d'environ 3,63 cm et la hauteur d'environ 7,26 cm. L'aire maximale est alors de 248 cm^2

b) $A(R;h) = 2\pi Rh + 2\pi R^2\ \ et\ h = \frac{V}{\pi R^2}$ donc $A(R) = 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2}\right) + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$

$A'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}\ et\ A'(R) = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{2V}{4\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

Donc : $h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \frac{V\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)}{\pi\cdot\frac{V}{2\pi}} = 2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2R$

Exercice 8 :

a) 10 et 10 b) 30 et 30 (carré) d) $\sqrt{800}$ e) 35,78 et 8,94 f) 3,7 cm