

Analyse Série 11

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 6x^2$

b) $f(x) = 12x^6 - x^3$

c) $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

d) $f(x) = 3\sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{5}{x^6}$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

g) $f(x) = \frac{x^4+3x}{x^3}$

h) $f(x) = \frac{2x^6-4x^3+5}{x^6}$

i) $f(x) = \sqrt{3}$

Exercice 2:

Démontrer que $\lambda \cdot \frac{f^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $\lambda \cdot f^n \cdot f'$, si $n \neq -1$

Exercice 3:

On considère la fonction f définie sur $] - 1; \infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$

a) Démontrer que la fonction $F(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1}$ est une primitive sur $] - 1; \infty[$

b) La fonction $G(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$ est-elle aussi une primitive de f sur $] - 1; \infty[$?

c) Si F et G sont les deux des primitives de f sur $] - 1; \infty[$, comment sont-elles liées ?

d) Donner la forme générale de la primitive de f sur $] - 1; \infty[$.

Exercice 4:

Déterminer la primitive F de f qui satisfait à la condition donnée. Vérifier votre réponse en comparant les graphiques de f et de F .

a) $f(x) = 2x, F(0) = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}, F(1) = \frac{5}{2}$

c) $f(x) = -2x^5 + 5x^4, F(0) = 4$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \forall x \in]0; \infty[, F(1) = -1$

e) $f(x) = 2x + 2, F(-1) = 0$

Exercice 5:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -x + 6, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Exercice 6:

Déterminer la primitive F de f qui satisfait à la condition donnée. Vérifier votre réponse en comparant les graphiques de f et de F .

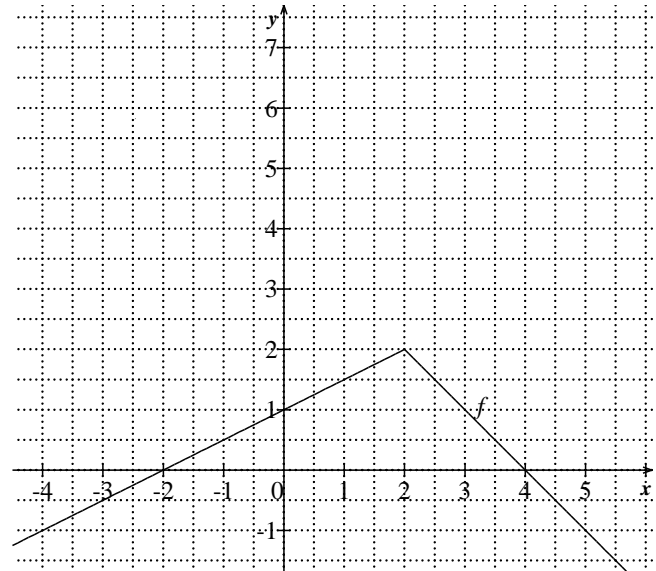
$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq 0 \\ -2x, & \text{si } x > 0 \end{cases}, F(0) = -4$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -x + 6, & \text{si } x > 4 \end{cases}, F(0) = 1$$

Exercice 7:

f est la fonction représentée ci-contre.

- Déterminer l'expression fonctionnelle de f
- Déterminer les primitives de f .
- Déterminer la primitive F de f telle que $F(-1) = 1$.
- Représenter F sur le graphique ci-contre.

**Exercice 8:**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \leq -2 \\ x^2, & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- La fonction f est-elle continue en -2 ou en 1 ?
- Calculer l'équation de la primitive de f qui contient le point $(0; 0)$.
- Déterminer l'équation d'une primitive quelconque de f .
- Représenter f ainsi que la primitive obtenue en b).

Exercice 9:

Calculer les primitives des fonctions suivantes.

$$\text{a) } f(x) = (3x - 5)^4 + 1$$

$$\text{c) } f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x+2}{(x^2+4x+1)^3}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{2x + 5}$$

Exercice 10:

Quelle est la primitive F de $f(x) = 4\cos(2x - \pi)$ telle que $F(0) = 2$?

Exercice 11:

Déterminer les fonctions f , g et h en tenant compte des conditions imposées.

a) La courbe représentative de f passe par le point $(1; 6)$ et la pente de sa tangente en $(x; f(x))$ est donnée par la formule $2x + 1$.

b) $g'(x) = 3x^2 - 4, g(5) = 54$

c) $h''(x) = 2x, h'(2) = 8, h(-2) = -8$

Exercice 12:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 30(2x + 7)^{14}$

e) $f(x) = 3 \cdot (x^3 + 6x)^{10} \cdot (x^2 + 2)$

b) $f(x) = 30x(x^2 + 7)^{14}$

f) $f(x) = \sqrt{5x + 3}$

c) $f(x) = x(2x^2 + 7)^{14}$

g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

d) $f(x) = 125 \cdot (5x^3 + 10x)^{24} \cdot (3x^2 + 2)$

h) $f(x) = \frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$

Exercice 13:

1) $f(x) = \frac{5}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 1$

18) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$

2) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$

19) $f(x) = x\sqrt{x}$

3) $f(x) = (x + 1)^2$

20) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

4) $f(x) = (2x + 1)^3$

21) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$

5) $f(x) = (2 - x)^{12}$

22) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = 6x(3x^2 + 1)^2$

23) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

7) $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 3x + 1)^5$

24) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x}$

8) $f(x) = 6x(1 - x^2)^3$

25) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{ax^2 + b}, a \neq 0$

9) $f(x) = (1 - 2x)^2$

26) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

10) $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2}$

27) $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$

11) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

28) $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$

12) $f(x) = -\frac{4}{x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}$

29) $f(x) = (3x^2 + 1)\sqrt{x^3 + x + 2}$

13) $f(x) = \frac{x^3-3}{x^2}$

30) $f(x) = (x + 2\sqrt{x})^2$

14) $f(x) = \frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

15) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$

16) $f(x) = (3x + 2)^6$

17) $f(x) = (16x - 10)(4x^2 - 5x)^2$

Exercice 14:

Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sin(x)$

d) $f(x) = \sin^7(x) \cos(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

e) $f(x) = 2 \sin(x) + 3 \cos(x)$

c) $f(x) = \cos(6x)$

f) $f(x) = \sin(3x)$

Exercice 15: Déterminer les primitives des fonctions suivantes

a) $f(x) = (x + 1)^2$

f) $f(x) = \frac{4}{(2x+5)^2}$

b) $f(x) = (2x + 1)^5$

g) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

h) $f(x) = 4 \cos(x) - \sin(2x)$

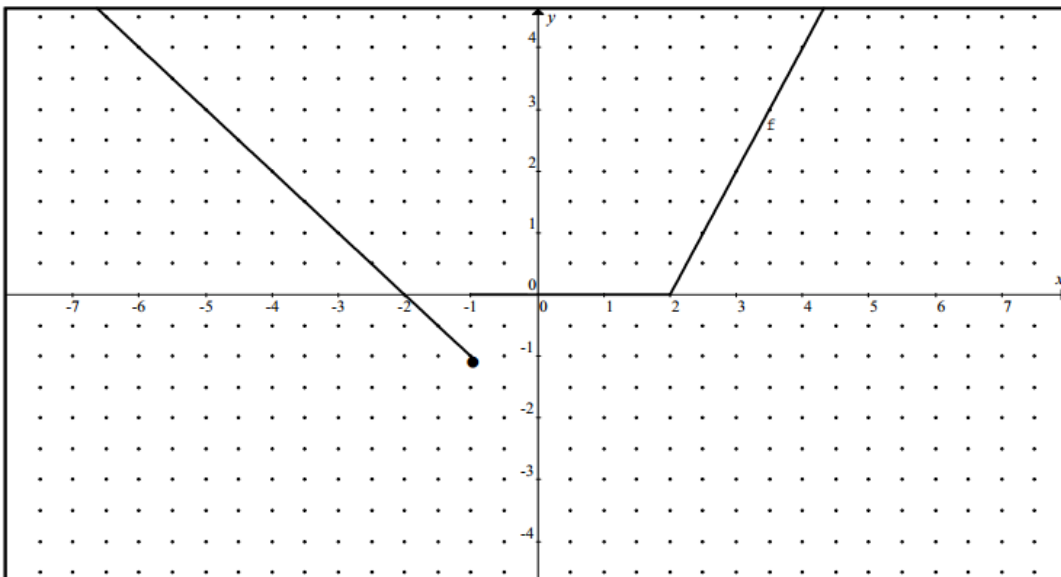
d) $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^2}$

i) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 16:

- Déterminer l'équation de f
- Déterminer les primitives de f
- Déterminer la primitive de F telle que $F(0) = 1$
- Représenter F sur le graphique ci-dessous.



Plus d'exercices ? Voir Monographie de la CRM n°25, *Analyse*, exercices p.94-97

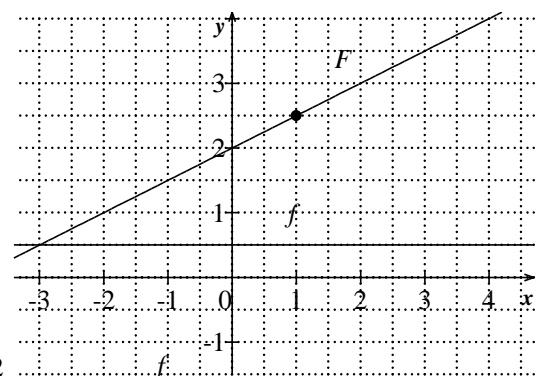
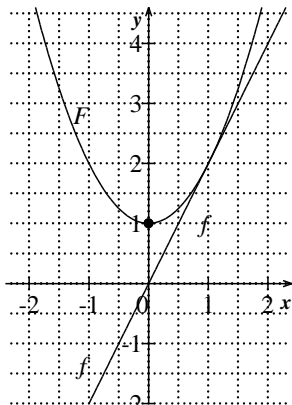
Solutions Analyse Série 11:

- Ex 1:** a) $F(x) = 2x^3 + c, c \in \mathbb{R}$ b) $F(x) = \frac{12}{7}x^7 - \frac{1}{4}x^4 + c, c \in \mathbb{R}$ c) $F(x) = 4^4\sqrt{x^5} - 4^4\sqrt{x^7} + c$
 d) $F(x) = 2x\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$ e) $F(x) = -\frac{1}{x^5} + c, c \in \mathbb{R}$ f) $F(x) = \frac{4}{7}x^4\sqrt{x^3} + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + c, c \in \mathbb{R}$
 g) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{x} + c, c \in \mathbb{R}$ h) $F(x) = 2x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^5} + c, c \in \mathbb{R}$ i) $F(x) = \sqrt{3} \cdot x + c, c \in \mathbb{R}$

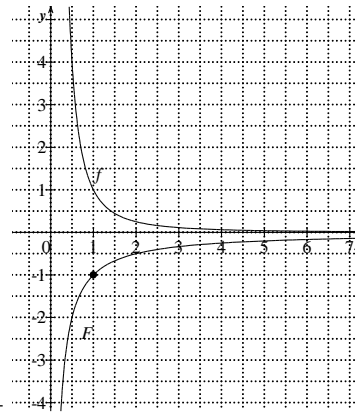
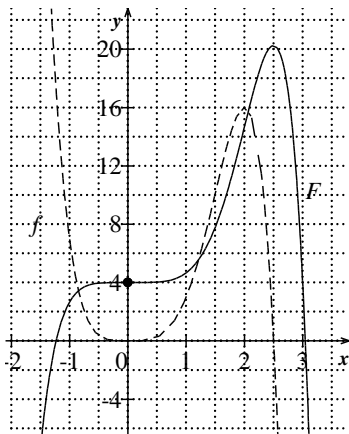
Ex 2: $\left(\lambda \cdot \frac{f^{n+1}}{n+1}\right)' = \lambda \cdot \left(\frac{f^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{\lambda}{n+1} \cdot (f^{n+1})' = \frac{\lambda}{n+1} \cdot (n+1) \cdot f^{n+1} \cdot f' = \lambda \cdot f^n \cdot f'$ (si $n \neq -1$)

- Ex 3:** a) $F'(x) = \dots = f(x)$ b) $G'(x) = f(x)$ c) $F(x) - G(x) = \text{constante}$ d) $F(x) = \frac{x^2+x+2}{x+1} + c, c \in \mathbb{R}$

Ex 4: a) $F(x) = x^2 + 1$



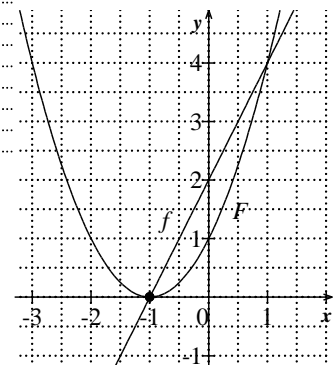
b) $F(x) = \frac{1}{2}x + 2$



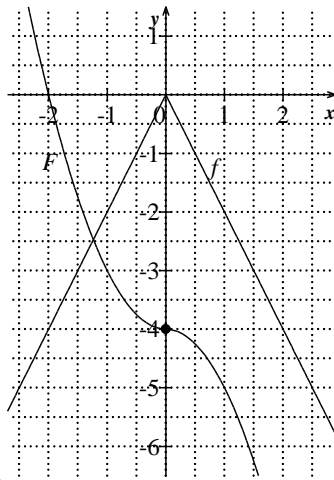
c) $F(x) = -\frac{1}{3}x^6 + x^5 + 4$

d) $F(x) = -\frac{1}{x}$

e) $F(x) = x^2 + 2x + 1$

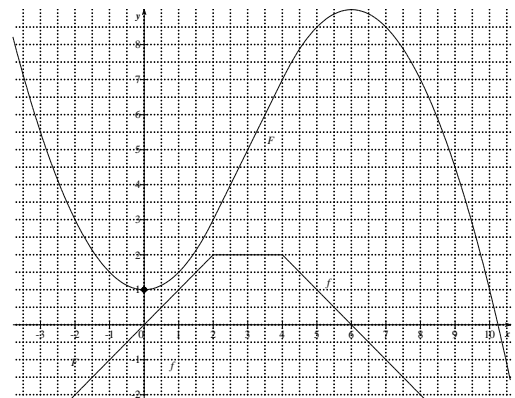


Ex 5: a) $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + c, & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4} + c; & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 + C & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x^2}{2} + 6x - 10 + C & \text{si } x > 4 \end{cases}$

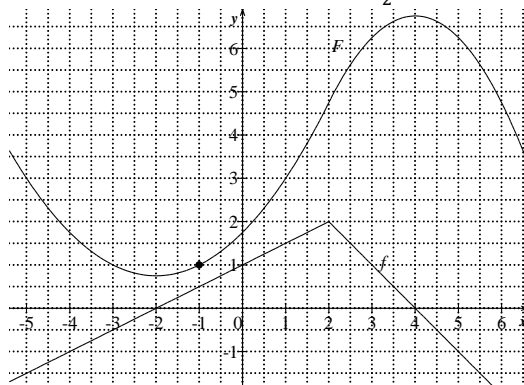
Ex 6:

$$a) F(x) = \begin{cases} x^2 - 4; & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 - 4; & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$b) F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{x^2}{2} + 6x - 9, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



$$\text{Ex 7: a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 4, & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad b) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + x + c \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 + c, & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad c) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{4}, & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{4}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

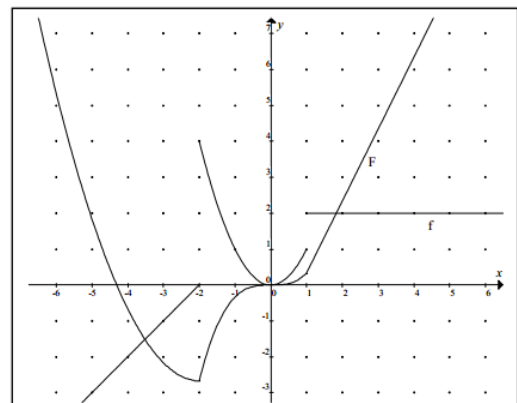


d)

Ex 8:a) f n'est ni continue en -2 ni en 1 .

$$b) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3}, & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{3}x^3, & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x - \frac{5}{3}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$c) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + c, & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} + c, & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x - 1 + c, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Ex 9:

a) $F(x) = \frac{1}{15}(3x-5)^5 + x + c$

d) $F(x) = \frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}} + c$

b) $F(x) = -\frac{1}{4(x^2+4x+1)^2} + c$

c) $F(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + c$

Ex 10:

$F(x) = 2 \sin(2x - \pi) + 2$

Ex 11: a) $f(x) = x^2 + x + 4$ b) $g(x) = x^3 - 4x - 51$ c) $h(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + \frac{8}{3}$

Ex 12:

a) $F(x) = (2x+7)^{15} + c$

f) $F(x) = \frac{2}{15}(5x+3)\sqrt{5x+3} + c$

b) $F(x) = (x^2+7)^{15} + c$

g) $F(x) = \sqrt{x^2+5} + c$

c) $F(x) = \frac{1}{60}(2x^2+7)^{15} + c$

h) $F(x) = \sqrt{x^3-x} + c$

d) $F(x) = (5x^3+10x)^{25} + c$

e) $F(x) = \frac{1}{11}(x^3+6x)^{11} + c$

Ex 13: 1) $F(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + x + C$ 2) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$ 3) $F(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C$

4) $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C$ 5) $F(x) = -\frac{1}{13}(2-x)^{13} + C$ 6) $F(x) = \frac{1}{3}(3x^2+1)^3 + C$ 7) $F(x) = \frac{1}{6}(x^2-3x+1)^6 + C$

8) $F(x) = -\frac{3}{4}(1-x^2)^4 + C$ 9) $F(x) = -\frac{1}{6}(1-2x)^3 + C$ 10) $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + C$ 11) $F(x) = \frac{1}{1-x} + C$

12) $F(x) = \frac{4}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^4} + C$ 13) $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + C$ 14) $F(x) = \frac{-1}{2(1+2x^3)} + C$ 15) $F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + C$

16) $F(x) = \frac{1}{21}(3x+2)^7 + C$ 17) $F(x) = \frac{2}{3}(4x^2-5x)^3 + C$ 18) $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+3} + C$

19) $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$ 20) $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$ 21) $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$

22) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$ 23) $F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

24) $F(x) = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{2x} + C$ 25) $F(x) = \frac{3}{8a}\sqrt[3]{(ax^2+b)^4} = \frac{3}{8a}(ax^2+b)\sqrt[3]{ax^2+b} + C$

26) $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} + C$ 27) $F(x) = 2\sqrt{9+x^3} + C$

28) $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x^3+8} + C$ 29) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3+x+2)^3} = \frac{2}{3}(x^3+x+2)\sqrt{x^3+x+2} + C$

30) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{8}{5}\sqrt{x^5} + C$

Ex 14:

a) $F(x) = -\cos(x) + C$

e) $F(x) = -2\cos(x) + 3\sin(x) + C$

b) $F(x) = \sin(x) + C$

f) $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{6}\sin(6x) + C$

d) $F(x) = \frac{1}{8}\sin^8(x) + C$

Ex 15:

a) $F(x) = \frac{(x+1)^3}{3} + c$

b) $F(x) = \frac{(2x+1)^6}{12} + c$

c) $F(x) = -\frac{1}{x-1} + c$

d) $F(x) = -\frac{1}{3(x^2-1)} + c$

e) $F(x) = \begin{cases} x^2 + c, & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} + c, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f) $F(x) = -\frac{2}{2x+5} + c$

g) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 5)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(x^2 + 5x + 5) + c$

h) $F(x) = 4 \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + c$

i) $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 1} + c$

Ex 16:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{si } x \leq -1 \\ 0, & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2x - 4, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - 2x + c, & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{3}{2} + c, & \text{si } -1 < x < 2 \\ x^2 - 4x + \frac{11}{2} + c, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Il faut choisir $c = -\frac{1}{2}$ pour que $F(0) = 1$ 