Analyse Série 14

Ne pas écrire sur l'énoncé

Exercice 1:

On considère la fonction $f(x) = x^2$

a) Représenter f ainsi que la surface située sous f entre les verticales $x = 1$ et $x = 2$
b) Esquisser le corps engendré par la révolution de cette surface autour de l'axe horizontal.
c) Calculer le volume de ce corps.

Exercice 2:

On considère les fonctions $f(x) = 5 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

a) Esquisser f et g sur un même graphique puis hachurer la surface S située entre ces deux courbes.
b) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
c) Calculer le volume du corps engendré par la rotation de S autour de l'axe horizontal.

Exercice 3:

Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = mx$

Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Résoudre, en fonction de m, l'équation: $f(x) = g(x)$
b) Représenter f et g (pour un m de votre choix) puis la surface S située entre ces deux courbes.
c) Calculer, en fonction de m, le volume du corps engendré par la rotation de S autour de l'axe horizontal.
d) Quel est ce volume lorsque $m = 2$?

Exercice 4:

Soit $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ et λ une réel supérieur à 1.

On considère la surface S située sous la courbe de f entre les verticales $x = 1$ et $x = \lambda$.

a) Esquisser f et S
b) Calculer V_λ, le volume du corps engendré par la révolution de S autour de l'axe horizontal
c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to \infty} V_\lambda$

Exercice 5:

On considère la boule de rayon R comme le solide engendré par la révolution autour de l'axe Ox du domaine D limité par le graphe de $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ et l'axe Ox.

Déterminer son volume.

Exercice 6:

Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox.

Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume

a)	$f(x) = x + 1$	$a = 1$	$b = 3$
b)	$f(x) = mx$	$a = 0$	$b = h$
c)	$f(x) = \frac{1}{x}$	$0 < a < b$	
d)	$f(x) = 2 + \sin(x)$	$a = 0$	$b = 2\pi$

Exercice 7:

Le domaine borné délimité par les deux paraboles d'équations $f(x) = x^2 - 2x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$ tourne autour de l'axe Ox

Calculer le volume du corps ainsi engendré.

Exercice 8:

Les paraboles d'équation $f(x) = \frac{x^2}{4}$ et $g(x) = 5 - x^2$ délimitent une surface bornée S

Calculer le volume engendré par la révolution de S autour de Ox

---

Exercice 9:

De l'aire s'échappe d'un ballon avec un débit instantané de $3t^2 + 2t$ centièmes cubes par secondes pour $0 \leq t \leq 36$. Quel volume d'air s'échappe-t-il pendant ces 36 secondes ?

Exercice 10:

Calculer, pour autant qu'elles convergent, les intégrales suivantes.

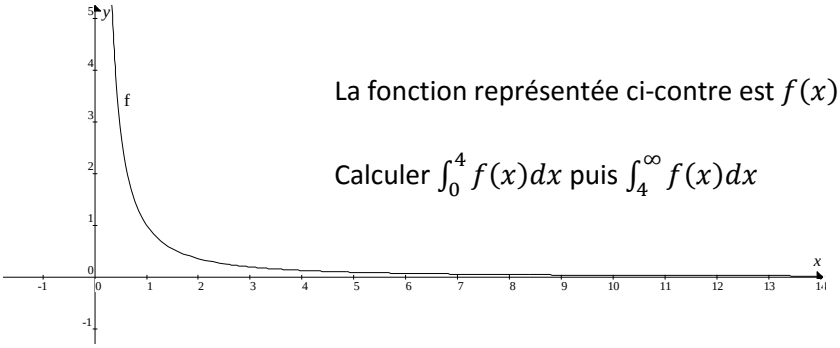
a) $\int_0^1 \frac{3}{x^2}\,dx =$ b) $\int_0^{+\infty} \sin(y)\,dy =$ c) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(u+1)^3}\,du =$

Exercice 11:

Soit $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, si\ x \in [-1;1] \\ \frac{1}{x^2}, sinon \end{cases}$

Représenter f puis calculer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *(il peut être judicieux d'utiliser la symétrie de f)*

Exercice 12:

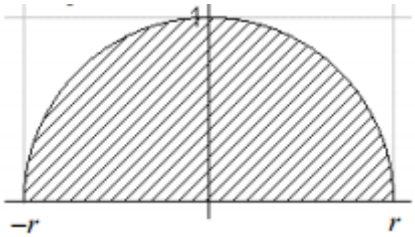


La fonction représentée ci-contre est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

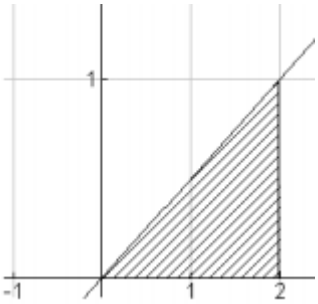
Calculer $\int_0^4 f(x)dx$ puis $\int_4^{\infty} f(x)dx$

Exercice 13: Les surfaces ci-dessous engendrent des solides de révolution lorsqu'on les fait tourner autour de l'axe des x. Dessiner pour chacun des cas le solide obtenu et calculez son volume de révolution

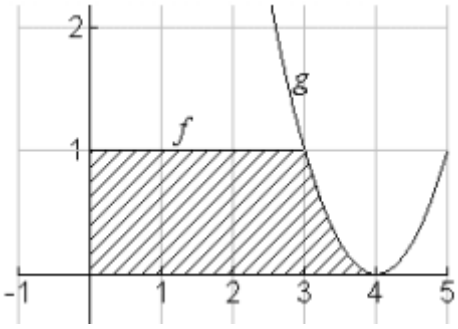
a) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$



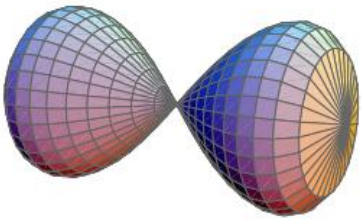
b) $f(x) = \frac{1}{2}x$



c) $f(x) = 1$ et $g(x) = (x-4)^2$



Exercice 14: Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 - x^4}$ pour x variant entre -1 et 1.

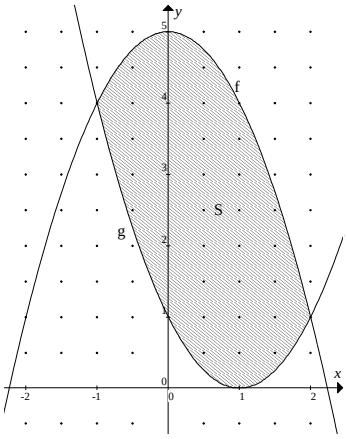


Solutions:

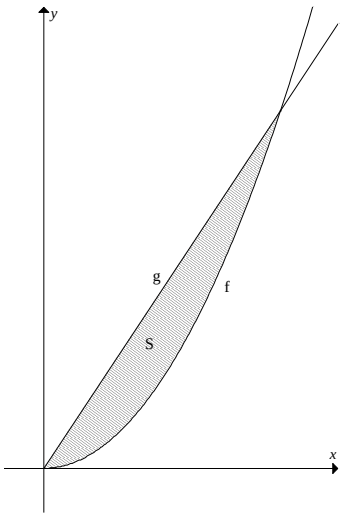
Ex 1: $V = \pi\int_1^2 f^2(x)dx = \pi\int_1^2 x^4 dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = \pi(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}) = \frac{31\pi}{5}$

Ex 2: b) $S = \{-1;2\}$

c)$V = \pi\int_{-1}^{2}(f^2(x)-g^2(x))dx = \pi\int_{-1}^{2}(4x^3-16x^2+4x+24)dx = \pi\cdot\left[x^4-\frac{16}{3}x^3+2x^2+24x\right]_{-1}^{2} = 45\pi$



Ex 3: b) $S = \{0;m\}$ c) $V = \pi\int_0^m(g^2(x)-f^2(x))dx = \pi\int_0^m(m^2x^2-x^4)dx = \pi\cdot\left(m^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)_0^m = \frac{2\pi m^5}{15}$ d) $\frac{64\pi}{15}$

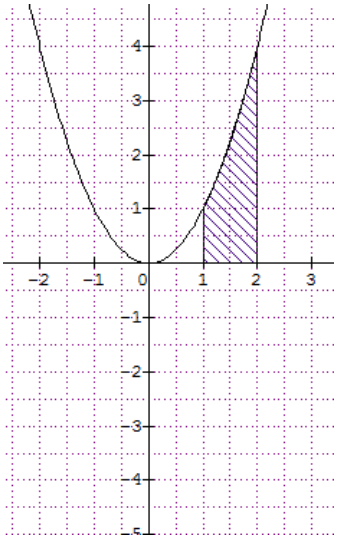


Ex 4: $V_\lambda = \pi\int_1^\lambda \frac{1}{4x^4}dx = \left[-\frac{\pi}{12x^3}\right]_1^\lambda = -\frac{\pi}{12\lambda^3}+\frac{\pi}{12}$ Ce volume tend vers $\frac{\pi}{12}$ lorsque λ tend vers ∞.

Ex 5: $\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)dx = \pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}$ **Ex 6:** a) $\frac{56\pi}{3}$ b) $\frac{\pi m^2h^3}{3}$ c) $\pi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ d) $9\pi^2$

Ex 7: 135π **Ex 8:** $V = \frac{176\pi}{3}$ **Ex 9:** $47'952cm^3$ **Ex 10:** a) diverge b) diverge c) -1/2 **Ex 11:** $\frac{16}{3}$ **Ex 12:** la première intégrale diverge. La seconde vaut 1. **Ex 13:** a)$\pi\cdot\frac{4}{3}r^3$ b) $\pi\cdot\frac{2}{3}$ c) $\frac{16\pi}{5}$ **Ex 14:** $\frac{4\pi}{15}$

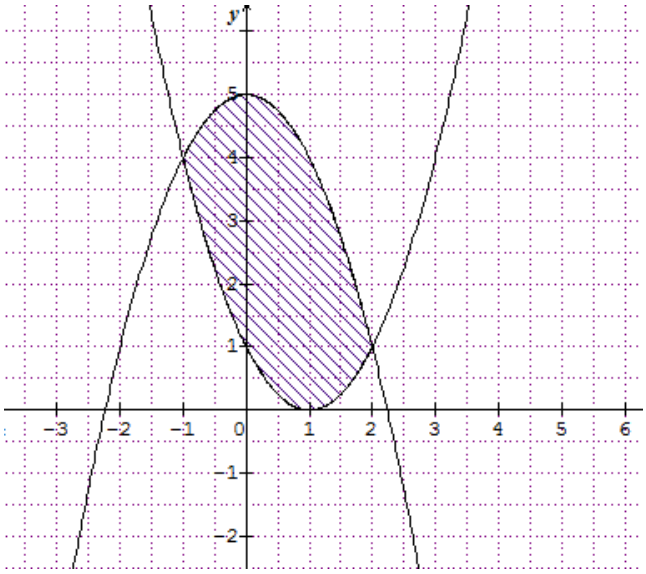
Corrigé exercice 1:



$$V = \pi \int_1^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = \pi \cdot \frac{1}{5}(2^5 - 1^5) = \frac{\pi}{5}(32 - 1) = \frac{31\pi}{5}$$

Corrigé exercice 2:

a)



b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5 - x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = -1$ donc $S = \{-1; 2\}$

c) $V = \pi \int_{-1}^{2} f^2(x) - g^2(x) dx = \pi \int_{-1}^{2} (5 - x^2)^2 - (x^2 - 2x + 1)^2 dx$
$= \pi \int_{-1}^{2} 25 - 10x^2 + x^4 - (x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1) dx =$
$= \pi \int_{-1}^{2} 4x^3 - 16x^2 + 4x + 24 \, dx = \pi \left[x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 2x^2 + 24x\right]_{-1}^{2} = 45\pi$

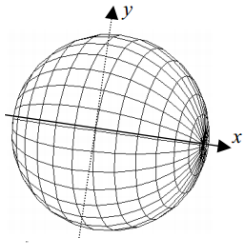
Corrigé exercice 13:

a)

$$\text{Volume} = \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \cdot \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2 \cdot (-r) + \frac{(-r)^3}{3} \right] =$$

$$\text{Volume} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3$$

On retrouve bien le volume d'une sphère de rayon r : $\text{Volume} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

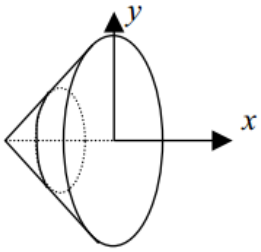


b)

Le deuxième volume est celui d'un cône de hauteur $h = 2$ et rayon $r = 1$

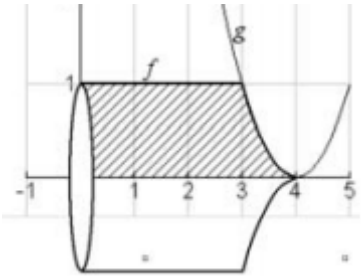
$$\text{Volume} = \pi \cdot \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \underline{\underline{\pi \cdot \frac{2}{3}}}.$$

Remarquons qu'on retrouve le volume d'un cône : $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.



c)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 1^2 \, dx + \pi \cdot \int_3^4 (x-4)^4 \, dx = \pi \cdot 3 + \pi \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot (x-4)^5 \right]_3^4 = 3\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{16\pi}{5} \approx 10{,}053$$



Corrigé exercice 14:

$$\text{Volume} = \pi \cdot \int_{-1}^{1} x^2 - x^4 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] \cdot 2 = \frac{4\pi}{15} \approx 0{,}837758$$