Analyse Série 2

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

a) Calculer $f(1{,}8), f(1{,}9), f(1{,}99), f(1{,}999)$
b) Calculer $f(2{,}2), f(2{,}1), f(2{,}01), f(2{,}001)$
c) Sans autre calcul, peut-on prédire $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

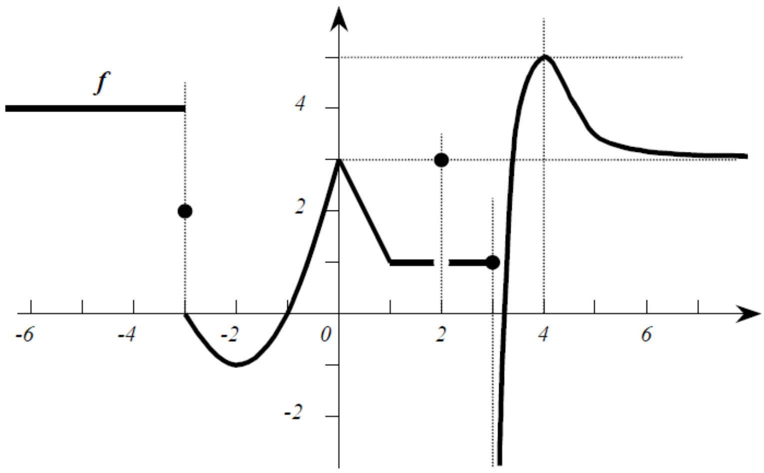
Exercice 2 :

En utilisant **uniquement la calculatrice**, essayer de déterminer si chacune des limites suivantes existe, puis, si oui, sa valeur.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$
b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$
c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ [x est mesuré en radians]
d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

Exercice 3 :

Voici la représentation graphique d'une fonction réelle f de domaine $D_f = \mathbb{R}$



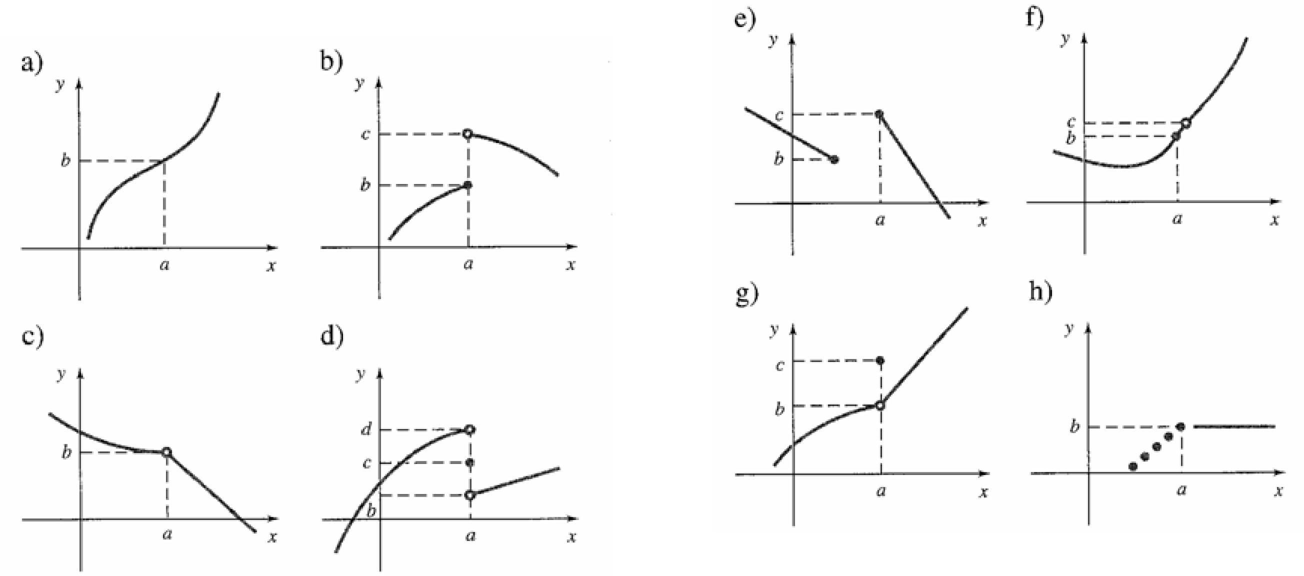
Déterminez les expressions suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$
b) $f(0) =$
c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$
d) $f(-20) =$
e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$
f) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$
g) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$
h) $\lim\limits_{x\to -3} f(x) =$
i) $f(-3) =$
j) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$
k) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$
l) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$
m) $f(3) =$
n) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$
o) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$
p) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$
q) $\lim\limits_{x\to 47{,}8} f(x) =$
r) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) =$

Exercice 4 :

Pour chacune des fonctions suivantes définies par un graphique, déterminer

$$f(a),\ \lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x)\ et\ \lim_{x\to a} f(x)$$



Exercice 5 : Pour chacune des fonctions ci-dessous :

a) Représentez f, après avoir simplifié, si possible, l'écriture algébrique de f.

b) Décidez à l'aide de a), si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existent.

c) Décidez si f est continue en 0.

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{2x}, si\ x < 0 \\ 2x - \frac{3}{2}, si\ x \geq 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, si\ x < 0 \\ 2, si\ x = 0 \\ x - 1, si\ x > 0 \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+5x}{|x|}, si\ x \neq 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$

Exercice 6 :

a) Expliquer ce que veut dire $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 8$

b) Dans cette situation, est-il possible que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe ?

Exercice 7 :

Sur trois graphiques différents, représentez les trois fonctions suivantes en respectant les conditions :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$; $f(-5) = 2{,}5$; $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$; $f(0) = 4$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1\ et\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -0{,}5$

b) $g(-7) = -3$; $\lim\limits_{x\to -7} g(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = 4\ et\ \lim\limits_{x\to \infty} g(x) = 3$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \infty$; $h(1) = -3$; $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = 2{,}5\ et\ \lim\limits_{x\to \infty} h(x) = 0$

Corrigé Analyse Série 2 :

Exercice 1 :

a) $f(1{,}8) = 3{,}8; f(1{,}9) = 3{,}9; f(1{,}99) = 3{,}99; f(1{,}999) = 3{,}999$

b) $f(2{,}2) = 4{,}2; f(2{,}1) = 4{,}1; f(2{,}01) = 4{,}01; f(2{,}001) = 4{,}001$

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

Exercice 2 :

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0{,}\overline{6}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0{,}35$

Exercice 3 :

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3 = f(0)$

b) $f(0) = 3$

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0 = f(-1)$

d) $f(-20) = 4$, probablement ?!?

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4$, probablement ?!?

f) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 4 \neq f(-3)$

g) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 0 \neq f(-3)$

h) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ n'existe pas, car la limite à gauche est différente de la limite à droite.

i) $f(-3) = 2$

j) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$

k) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

l) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas, car la limite à gauche est différente de la limite à droite.

m) $f(3) = 1$

n) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$

o) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 \neq f(2)$

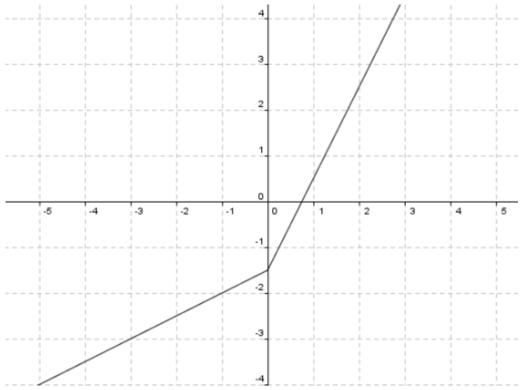
p) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 5 = f(4)$

q) $\lim\limits_{x\to 47{,}8} f(x) = 3$, probablement ?!?

r) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 3$, probablement ?!?

Exercice 4 :

	$f(a)$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$
a)	b	b	b	b
b)	b	b	c	N'existe pas
c)	N'existe pas	b	b	b
d)	c	d	b	N'existe pas
e)	c	Aucun sens	c	Aucun sens
f)	b	b	b	b
g)	c	b	b	b
h)	b	Aucun sens	Aucun sens	Aucun sens



Exercice 5 :

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{2x}, \textit{si } x < 0 \\ 2x - \frac{3}{2}, \textit{si } x \geq 0 \end{cases}$

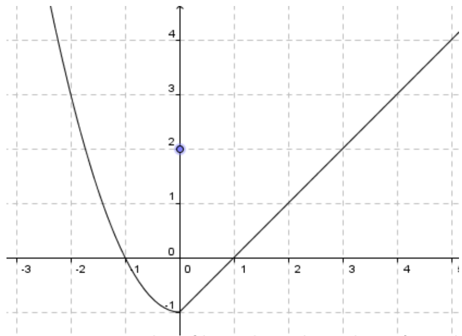
a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, si\ x < 0 \\ 2x - \frac{3}{2}, si\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} 2x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{3}{2}$

c) continue

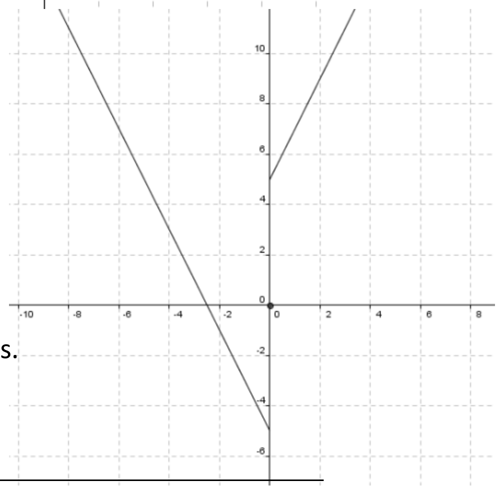


2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, si\ x < 0 \\ 2, si\ x = 0 \\ x - 1, si\ x > 0 \end{cases}$

a) pas de simplification

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

c) pas continue



3) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+5x}{|x|}, si\ x \neq 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, si\ x > 0 \\ -2x - 5, si\ x < 0 \\ 0, si\ x = 0 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -5$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

c) pas continue en 0

Exercice 6 :

b) non.

Exercice 7 :