Analyse Série 3

Ne pas écrire sur l'énoncé. Résoudre les exercices sur des feuilles quadrillées

Exercice 1:

a) Dans un repère orthonormé (1 unité = 2 largeurs de carré), tracer le plus précisément possible la fonction $f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 - 3, si\ x < -3 \\ -x - 2, si\ -3 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3}x, si\ x \geq 3 \end{cases}$

b) Déterminer par calcul et graphiquement les limites suivantes:

$$\lim_{x \to -5} f(x); \quad \lim_{x \to -3} f(x); \quad \lim_{x \to 0} f(x); \quad \lim_{x \to 3} f(x)$$

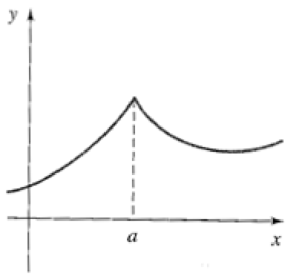
c) Vrai ou faux ?

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ existe.
3. La $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ existe.
4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.
5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
6. La fonction f est continue pour $x = -3$.

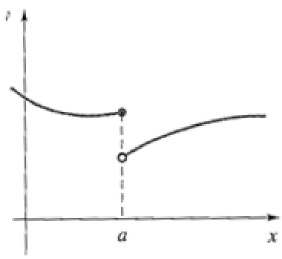
Exercice 2:

Pour chacune des fonctions décrites par son graphique, vérifier à l'aide de la définition de la continuité d'une fonction, si elle est continue au point d'abscisse $x = a$. Si elle est discontinue en $x = a$, dire pourquoi.

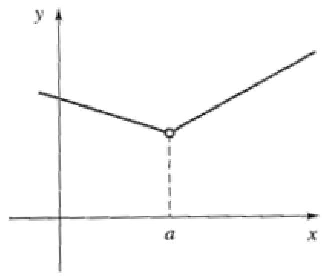
a)



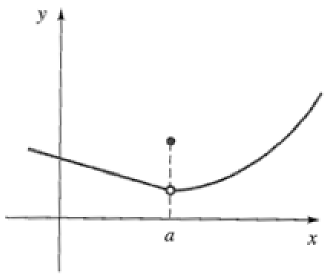
b)



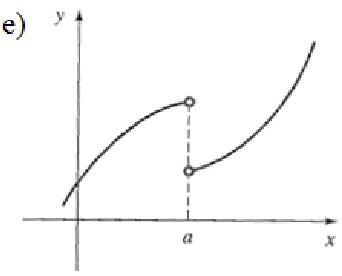
c)



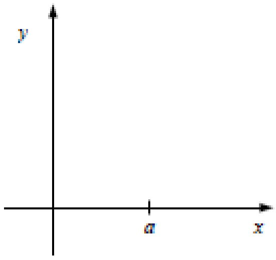
d)



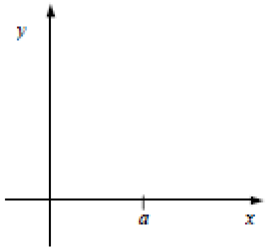
e)



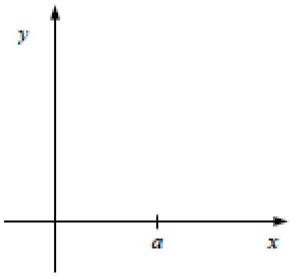
Exercice 3: Complétez les graphiques suivants selon les indications et déterminez lesquelles de ces fonctions sont continues en a.



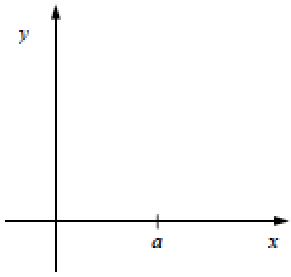
a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, mais pas $f(a)$



b) $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existent, mais $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$



c) $f(a)$ existe, mais pas $\lim\limits_{x\to a} f(x)$



d) $f(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existent, et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exercice 4: Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes et leurs éventuels points de discontinuité:

a) $f(x) = \begin{cases} -x, si\ x < 0 \\ 2x, si\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, si\ x < 2 \\ 7, si\ x = 2 \\ x^2 + 1, si\ x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, si\ x < -1 \\ 0, si\ x = -1 \\ 1 - x, si\ x > -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, si\ x \neq 1 \\ 3, si\ x = 1 \end{cases}$

Exercice 5: Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6}, si\ x \neq -2 \\ \lambda, si\ x = -2 \end{cases}$ Déterminer toutes les valeurs de λ telles que la fonction soit continue en $x = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{2x^2-7x-4}, si\ x \neq 4 \\ \lambda, si\ x = 4 \end{cases}$ Déterminer toutes les valeurs de λ telles que la fonction soit continue en $x = 4$

Exercice 6:

Esquisser le graphique d'un fonction qui soit continue partout sauf en $x = 2$.

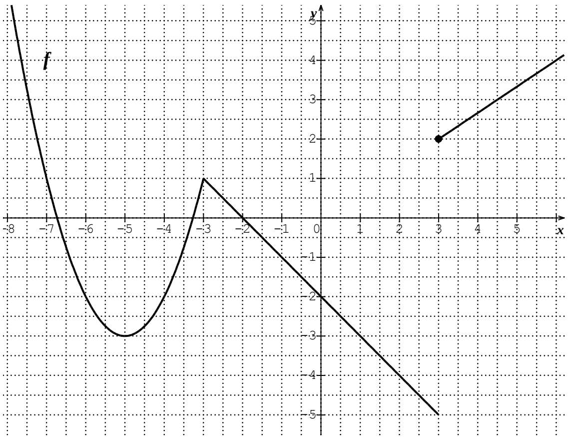
Exercice 7:

Inventer une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
(Donner son expression algébrique)

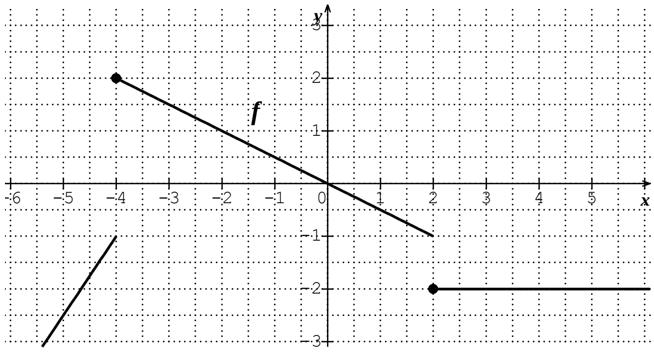
Exercice 8: La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer, au vu de son graphique, les intervalles sur lesquels la fonction est continue:

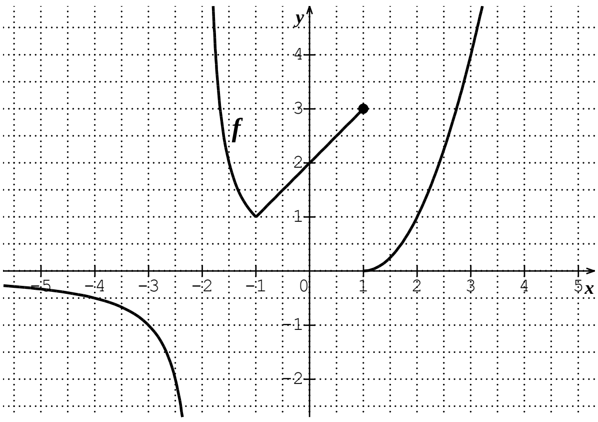
a)



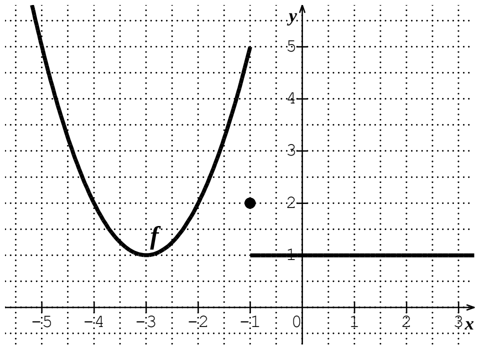
b)



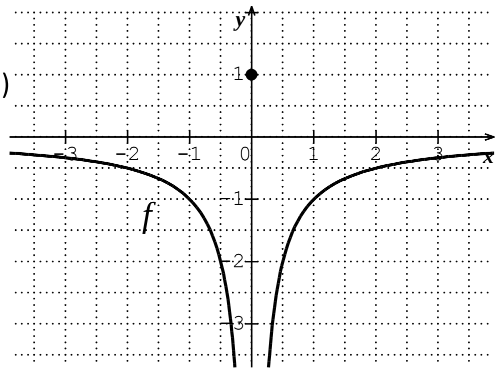
c)



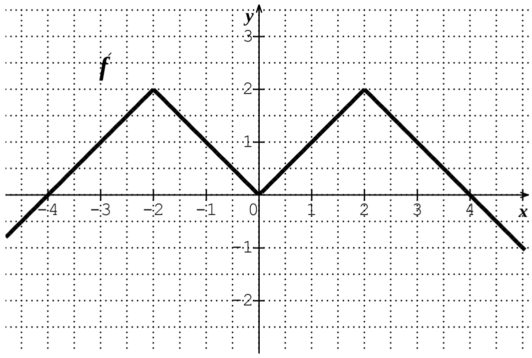
d)



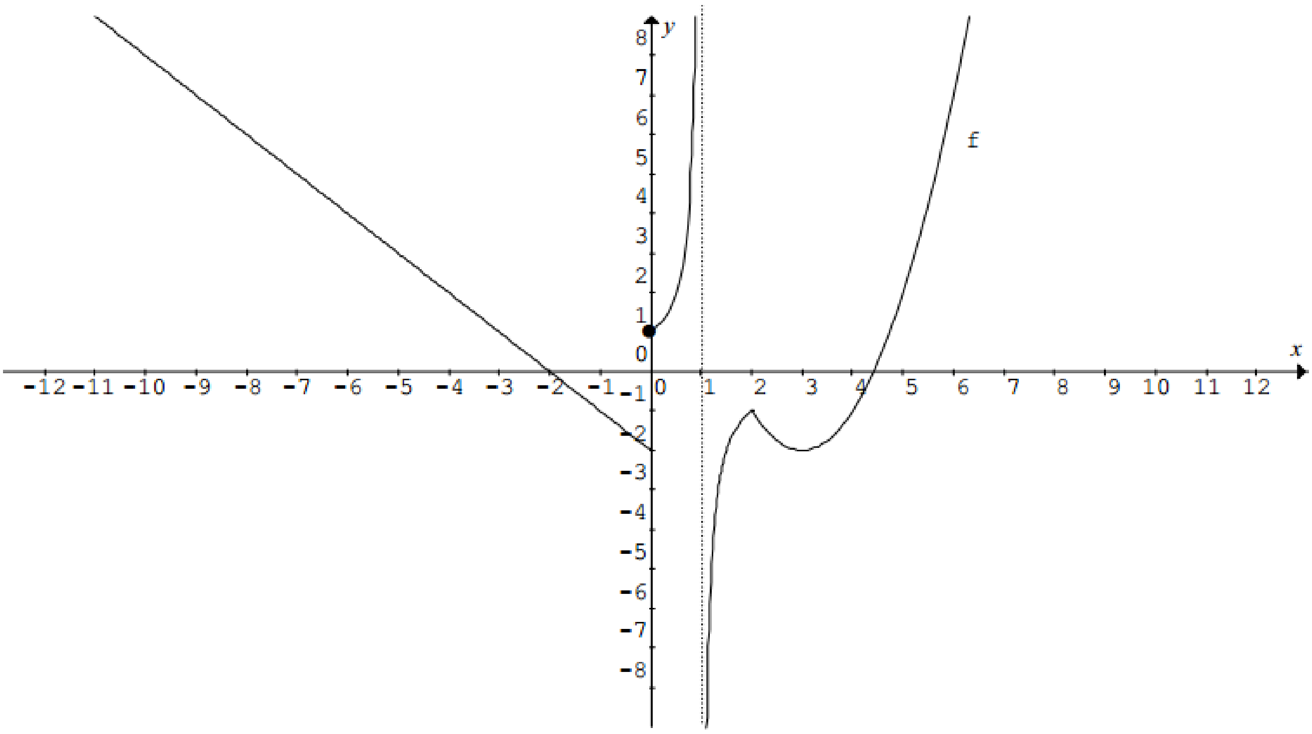
e)



f)



Exercice 9:



a) Déterminer graphiquement le domaine, les zéros et le tableau des signes de f

b) Quels sont les points en lesquels f n'est pas continue ?

Exercice 10:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \leq 0 \\ \sqrt{x}, si\ 0 < x \leq 5 \\ x - 2, si\ x > 5 \end{cases}$$

Représenter f puis déterminer son domaine de continuité.

Exercice 11:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, si\ x \leq 1 \\ x^2 + a, si\ 1 < x < 2 \\ -x + b, si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer a et b de sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2, si\ x \leq -1 \\ ax + b, si - 1 < x < 1 \\ 4 - x^2, si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Calculer a et b de sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, si\ x \leq \lambda \\ 1 - x^2, si\ x > \lambda \end{cases}$$

Déterminer λ de sorte que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

(Indiquer toutes les possibilités)

Exercice 14:

Montrer par quelques illustrations que l'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue peut être un intervalle quelconque (ouvert, fermé, semi ouvert)

Exercice 15:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, si\ x < -1 \\ x^2, si -1 \leq x < 2 \\ 4 - x, si\ x \geq 2 \end{cases}$$

a) Représenter f

b) Définir algébriquement une fonction g qui vérifie la condition $f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16:

$$f(x) = \begin{cases} 2, si\ x \leq 1 \\ x^2, si > 1 \end{cases}$$

Définir une fonction g et une fonction h de sorte que $f + g$ et $f \cdot h$ soient continues en 1.

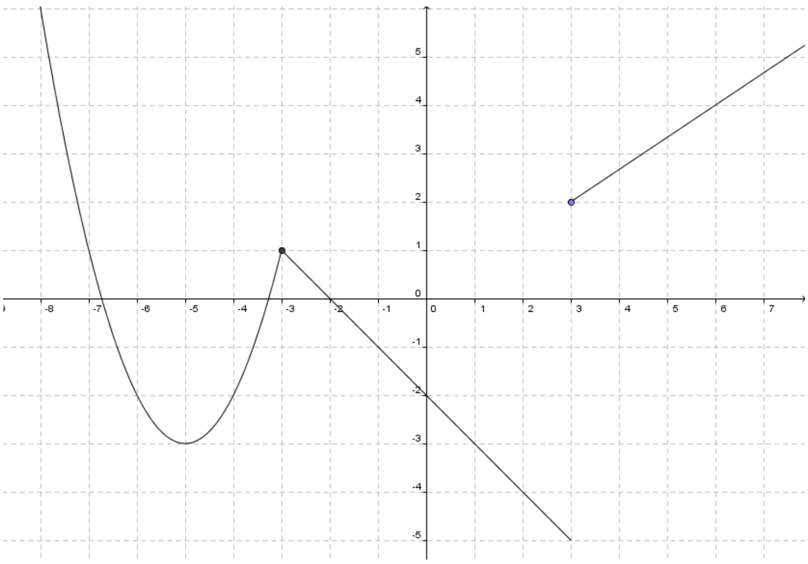
Exercice 17:

Représenter une fonction f vérifiant simultanément toutes les conditions ci-dessous

- f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to o^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$

Corrigé Analyse Série 3:

Exercice 1:



b) $\lim_{x\to-5} f(x) = -3$; $\lim_{x\to-3} f(x) = 1$; $\lim_{x\to0} f(x) = -2$;

$\lim_{x\to3} f(x)$ *n'existe pas* car:

$$\lim_{x\to3^-} f(x) = -3-2 = -5$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2$$

donc $\lim_{x\to3^-} f(x) \neq \lim_{x\to3^+} f(x)$

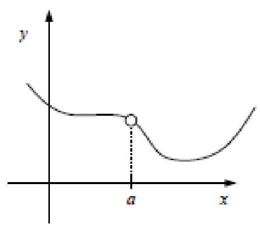
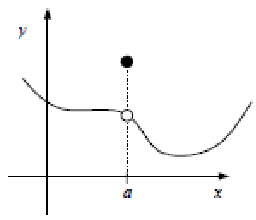
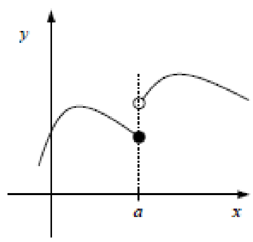
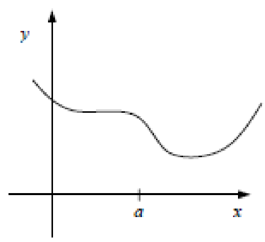
c) 1. faux. pas continue en 3 donc pas continue sur sur $\mathbb{R}$ 2. vrai 3.vrai 4. faux 5. vrai 6. vrai

Exercice 2:

a) Continue b) Discontinue car $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas c) Discontinue car $f(a)$ n'existe pas d) Discontinue car $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ e) Discontinue car $f(a)$ n'existe pas et $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas

Exercice 3:

Les possibilités de compléter les graphiques suivants selon les indications sont infinies. Seul compte le comportement de la fonction au voisinage de a.
Seul la fonction du graphique d) satisfait les conditions de continuité en $x = a$, donc c'est la seule qui est continue en $x = a$.

 *a)* $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mais pas $f(a)$	 *b)* $f(a)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent, mais $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
 *c)* $f(a)$ existe, mais pas $\lim_{x\to a} f(x)$	 *d)* $f(a)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent, et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exercice 4:

a) $D_f = \mathbb{R}$. Cette fonction est continue en tout $x \neq 0$, car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs. Reste à l'étudier au voisinage de $x = 0$: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, donc elle est aussi continue en $x = 0$. Conclusion, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $D_f = \mathbb{R}$. f est discontinue en 2 car la limite de $f(x)$ en 2 n'existe pas (différente à gauche et à droite)

c) $D_f = \mathbb{R}$. f est discontinue en -1 car la limite en-1 de $f(x)$ n'existe pas.

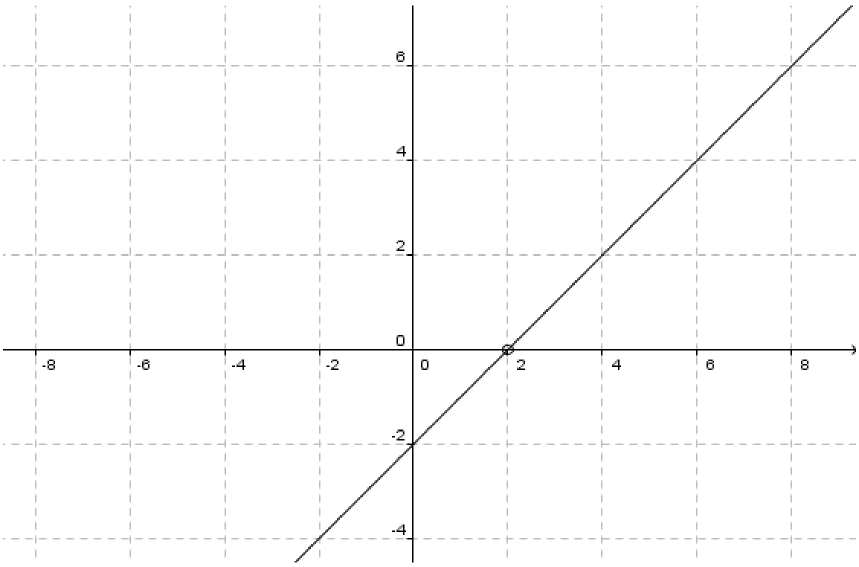
d) $D_f = \mathbb{R}$. pas de point de discontinuité. En $x = 1$, l'image vaut 3, la limite vaut 3 donc comme égalité entre l'image et la limite: la fonction est continue en 1.

Exercice 5:

a) Pour que f soit continue en $x = -2$, λ doit être égal à 1. Ainsi: $f(-2) = 1$ et $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$.
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

b) $\lambda = 0$ pour que f soit continue en $x = 4$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 6:



Exercice 7:

$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2}$

Exercice 8:

a) $[-8; 3[$ (ou $]-\infty; 3[$) et $[3; +\infty[$

b) $]-\infty; -4[; [-4; 2[$ et $[2; +\infty[$

c) $]-\infty; -2[;]-2; 1]$ et $]1; +\infty[$

d) $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$

e) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$

f) $\mathbb{R}$

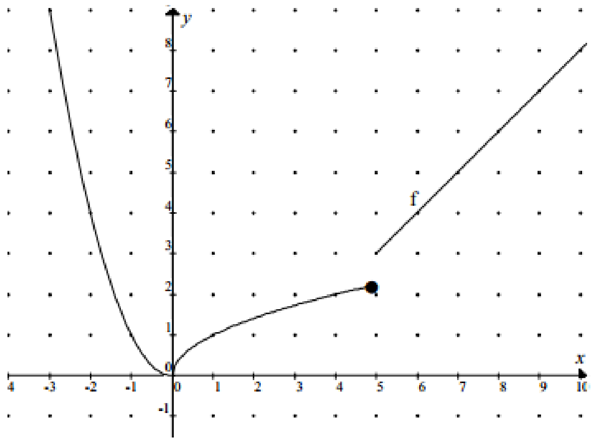
Exercice 9:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $Z_f = \{-2; 4{,}5\}$

b) f est discontinue en 0 et en 1

x		-2		0		1		$4{,}5$	
$f(x)$	+	0	-	1	+	/	-	0	+

Exercice 10:



f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

Exercice 11:

Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle le soit en 1 et en 2. $a = 1$ et $b = 7$

Exercice 12:

Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle le soit en -1 et en 1. $a = \frac{11}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$

Exercice 13:

$\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

Exercice 15: