Analyse Série 4:

Ne pas écrire sur l'énoncé. Résoudre les exercices sur des feuilles quadrillées

Exercice 1: Déterminer par calcul, si elles existent, les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+3x+6}{x^2+4x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-x}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x+1}{(x-3)^3}$

d) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{-3}{4x^2+4x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-3}{(x-1)(x^2-x+1)}$

Plus d'exercices ? Voir livre d'Analyse, CRM n°25, ex 2.32, p.52

Exercice 2: Déterminer par calcul, si elles existent, les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2-7x}{5x^2+x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x-1}{x^2-4x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2+x}{3x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{(x-2)^2}{-2x^2+5x}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{|x-1|}{2x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{|x-3|^3}{3x-9}$

Plus d'exercices ? Voir livre d'Analyse, p.53-54, ex 2.35 et 2.36

Exercice 3:

1) Déterminer le domaine de définition, le(s) zéro(s) et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes
2) Déterminer, si elles existent, toutes les asymptotes (verticales, horizontales et obliques) des fonctions suivantes.
3) Etudier le signe des fonctions suivantes à l'aide d'un tableau de signes
4) Esquisser le graphique de chacune des fonctions suivantes avec leurs asymptotes

a) $f(x) = \frac{-2x-4}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x+3}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

d) $f(x) = x^3 - x$

e) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$

f) $f(x) = \frac{-x^2-2x-1}{x+3}$

g) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

h) $f(x) = \frac{2x^2-9}{x^2-9}$

i) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

j) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$

k) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

5) Que pouvez-vous énoncer comme règles concernant les asymptotes verticales, horizontales et obliques des fonctions polynômiales et rationnelles grâce aux cas particulier ci-dessus ?

Plus d'exercices ? Livre d'Analyse, p. 54-55 exercice 2.38, 2.39 & p.57 exercice 2.50

Exercice 4: Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4+3x-1)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1+x^2-x^4+3x^5}{x^5-x^3+2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+7x^2-x-13}{x^3+5x^4-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+8x^2+2}{x^2+5x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x-1)^8}{(x+3)^8}$

Exercice 5: Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to-4^+} \frac{x+4}{\sqrt{x+4}}$

c) $\lim\limits_{x\to4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

Plus d'exercices ? Livre d'Analyse, p.47, exercice 2.5

Exercice 6: Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to2} \frac{(x-2)(x+4)}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^2+4x-7)$

c) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{2}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}$

e) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+6}{2x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{4x^3+5x^2-1}{x^7+2x^6+x^3}$

h) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

i) $\lim\limits_{x\to-3^-} \frac{\sqrt{x+3}}{x+3}$

j) $\lim\limits_{x\to0} \frac{6x^2+8x+7}{x^4+x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to6^+} \frac{x^2-6x}{2x^2-11x-6}$

l) $\lim\limits_{x\to1} \frac{6x+7}{x^2-2x+1}$

m) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2+1}{|x^2-4|}$

n) $\lim\limits_{x\to-11} \frac{x^2+4x-77}{x^2+14x+33}$

Exercice 7: Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin(\pi-x)}{x^2-\pi^2}$

b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}$

c) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-2x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-2}{x-3x^2}$

Plus d'exercices ? Livre d'Analyse p.57 exercice 2.49 & p. 47 exercice 2.4

Exercice 8: Calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

b) $\lim\limits_{x\to5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 9: Soit $f(x)=x^2$

a) Simplifier la fraction rationnelle $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

b) Calculer $\lim\limits_{\Delta x\to0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

c) Interpréter graphiquement le quotient $\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

Que représente alors la limite de ce quotient ?

Exercice 10:

Calculer, pour autant qu'elles existent, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{x^4-16}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-3x}{|x|}$

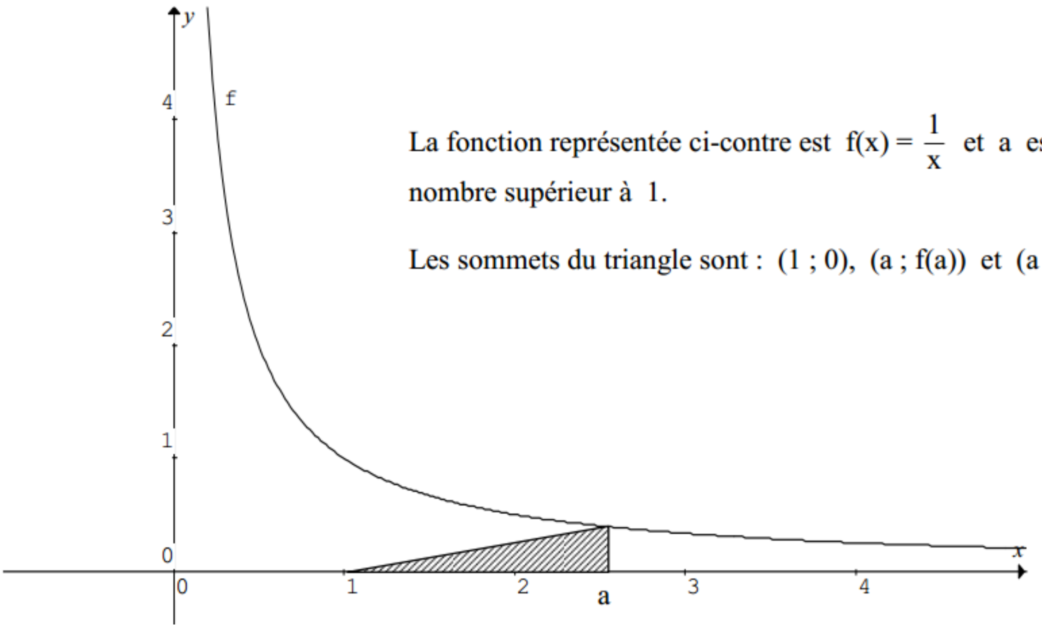
g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{x}{x+1}\right)$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x^2+2x}$

j) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Exercice 11:



La fonction représentée ci-contre est $f(x) = \frac{1}{x}$ et a est un nombre supérieur à 1.

Les sommets du triangle sont : $(1\,;0)$, $(a\,;f(a))$ et $(a\,;0)$.

a) Exprimer l'aire du triangle hachuré en fonction de a

b) Calculer cette aire lorsque $a = 10$

c) Calculer a de sorte que cette aire mesure $\frac{1}{5}$

d) Vers quelle valeur tend cette aire lorsque a tend vers ∞ ?

e) Quelle serait la réponse à la question d) si la fonction avait été $f(x) = \frac{1}{x^2}$?

Exercice 12:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{(2x-3)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+|x-1|-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-7x+3}{x^2-6x+9}$

e) $\lim\limits_{x\to 16} \frac{1-x}{\sqrt{x}-4}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2+x}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x+4}$

j) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x-2}{x} - \frac{x+1}{x^2}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + x\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2}$

Exercice 13:

Est-il possible de donner une valeur à λ de sorte que f soit continue en 1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, si\ x < 1 \\ \lambda, si\ x = 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, si\ x > 1 \end{cases}$$

Exercice 14:

La fonction suivante est-elle continue en 0 ?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, si\ x < 0 \\ 0, si\ x = 0 \\ \dfrac{1-\cos(x)}{x}, si\ x > 0 \end{cases}$$

Solutions Analyse Série 4

Exercice 1:

a) $+\infty$ b) n'existe pas c) n'existe pas d) $-\infty$ e) n'existe pas f) 3

Exercice 2:

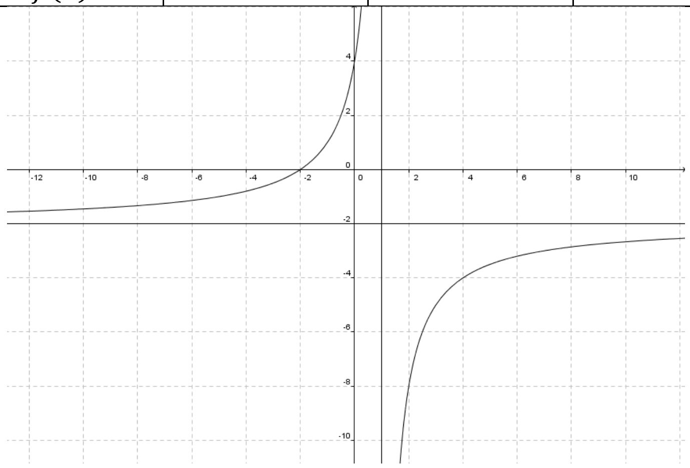
a) $\frac{2}{5}$ b) 0 c) $-\infty$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $+\infty$

Exercice 3:

a) 1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $Z_f = \{-2\}$ $f(0) = 4$ 2) $A.V.\,en\ x = 1; A.H.\,en\ y = -2$
3)

		-2		1	
$f(x)$	-	0	+	/	-

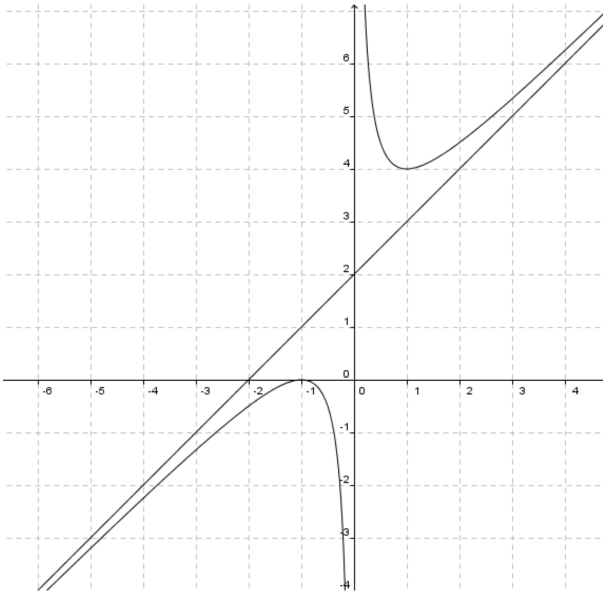
4)



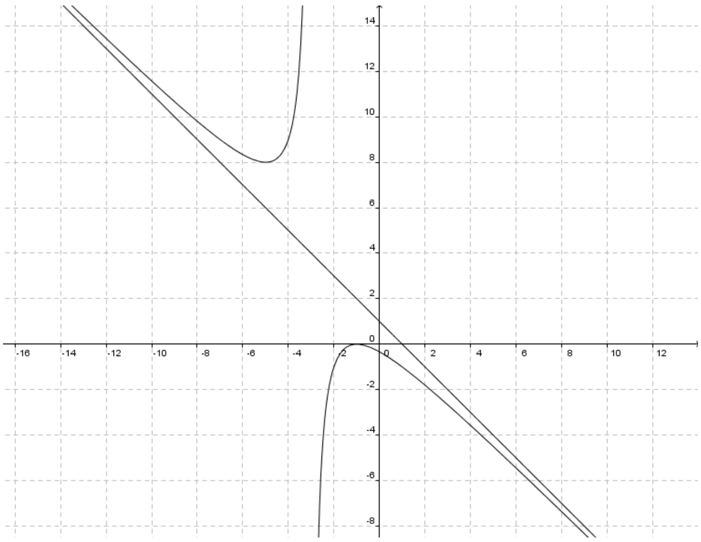
Pour les fonctions suivantes, je vous conseille d'aller sur internet télécharger le programme gratuit "**Geogebra**". Il vous permet de représenter les différentes fonctions de l'exercices et ainsi vous pourrez vérifier les différents points demandés. Une version du logiciel peut s'utiliser en ligne, sans à devoir le télécharger.

	D_f	$f(0)$	Z_f	$A.V.$	$A.H.$	$A.O.$
a)	$\mathbb{R}\backslash\{1\}$	4	-2	$x = 1$	$y = -2$	/
b)	$\mathbb{R} \setminus \{-3\}$	1	$\emptyset$	/	/	/
c)	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	-2	-4	$x = 2$	$y = 1$	/
d)	$\mathbb{R}$	0	$-1; 0; 1$	/	/	/
e)	$\mathbb{R}^*$	/	-1	$x = 0$	/	$y = x + 2$
f)	$\mathbb{R} \setminus \{-3\}$	-1/3	-1	$x = -3$	/	$y = -x + 1$
g)	$\mathbb{R}$	0	0	/	$y = 0$	/
h)	$\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$	1	$\pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$x = \pm 3$	$y = 2$	/
i)	$\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	0	0	$x = \pm 2$	/	$y = x$
j)	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	1	-1	/	/	/
k)	$\mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$	1	$\emptyset$	$x = -1$	$y = 0$	/

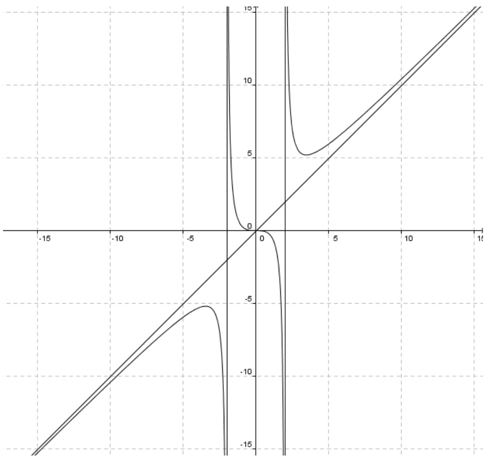
e)



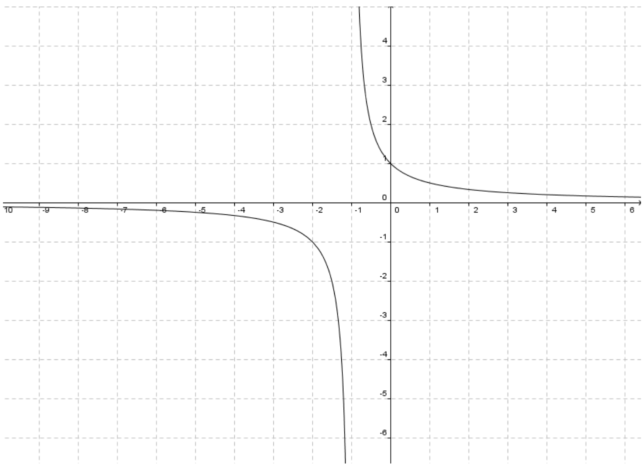
f)



i)



k)



Exercice 4:

a) $+\infty$ b) 3 c) 0 d) $-\infty$ e) 2^8

Exercice 5:

a) 0 b) 0 c) 1/4 d) $-\infty$

Exercice 6:

a) 3/2 b) $+\infty$ c) n'existe pas d) $+\infty$ e) 3 f) 3/2 g) $+\infty$ h)n'existe pas
i) impossible à cause du domaine: $D =]-3; +\infty[$ j) $+\infty$ k) 6/13 l) $+\infty$ m) $+\infty$ n) 9/4

Exercice 7:

a) $-\frac{1}{2\pi}$ b) 1/6 c) 4 d) $-1/3$ e) -1

Exercice 8:

a) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ b) 3 c) $\frac{5}{3}$ d) $-\infty$ (pas d'indéterminée)

Exercice 9:

a) $2 + \Delta x$ b) 2 c) il s'agit de la pente de la sécante à f passant par $\left(1; f(1)\right)$ et $\left(1 + \Delta x; f(1 + \Delta x)\right)$

Exercice 10:

a) 5 b) 2/3 c) 1 d) 1 e) 1/8 f) 3 à gauche et -3 à droite g) $-\infty$ à gauche et ∞ à droite h) -1 i) 1/2 j) 1/4

Exercice 11: a) $\frac{a-1}{2a}$ b) 9/20 c) $a = \frac{5}{3}$ d) 1/2 e) 0

Exercice 12:

a) -1/4 b) 1 à gauche et 3 à droite c) -1/2 d) $-\infty$ à gauche et ∞ à droite
e) ∞ à gauche et $-\infty$ à droite f) 2 g)0 h) ∞ (pas d'indéterminée) i) 0 (idem) j) 1/56 k) 1 l) -1/2
m) 1

Exercice 13:

oui, $\lambda = \frac{1}{2}$

Exercice 14:

Oui, car: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to +} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$