

## Analyse Série 4

Ne pas écrire sur l'énoncé. Résoudre les exercices sur des feuilles quadrillées

### Exercice 1:

a) Dans un repère orthonormé (1 unité = 2 largeurs de carré), tracer le plus précisément possible la

$$\text{fonction } f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 - 3, & \text{si } x < -3 \\ -x - 2, & \text{si } -3 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3}x, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

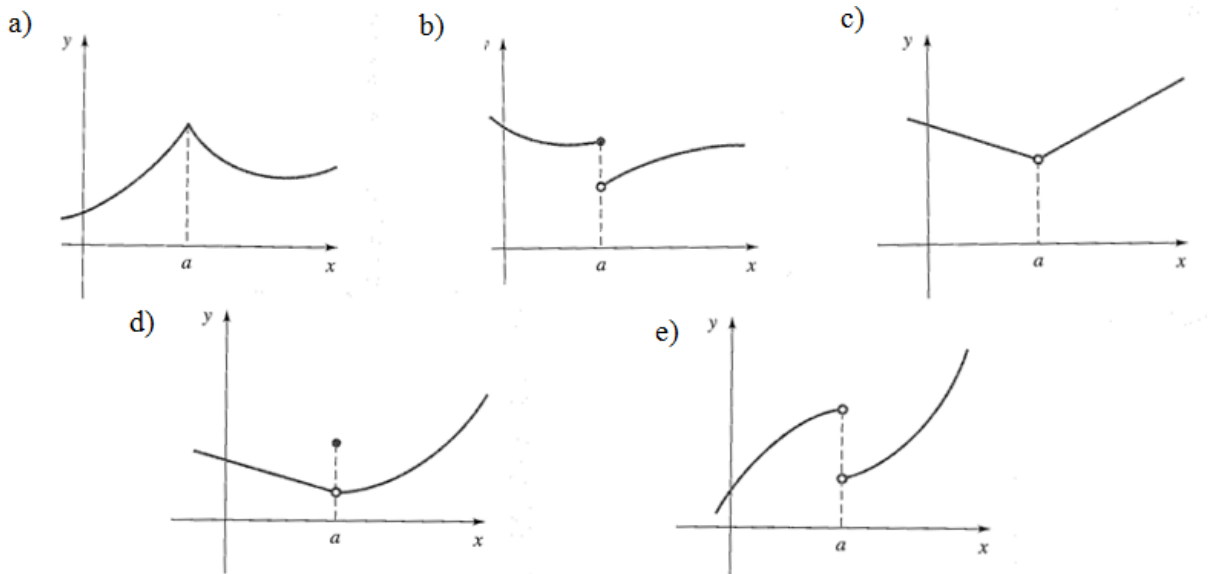
b) Déterminer par calcul et graphiquement les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

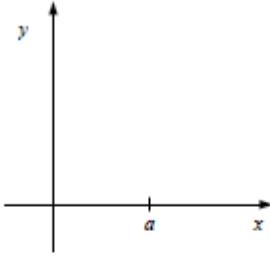
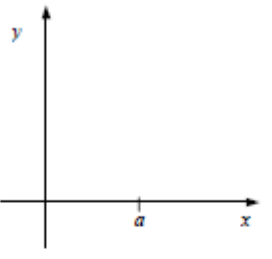
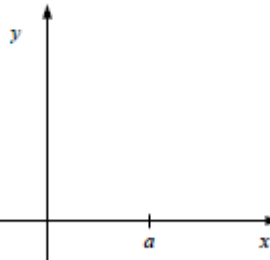
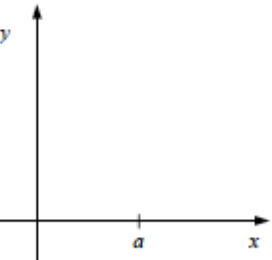
c) Vrai ou faux ?

1. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. La  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$  existe.
3. La  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$  existe.
4. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .
5. La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .
6. La fonction  $f$  est continue pour  $x = -3$ .

**Exercice 2:** Pour chacune des fonctions décrites par son graphique, vérifier à l'aide de la définition de la continuité d'une fonction, si elle est continue au point d'abscisse  $x = a$ . Si elle est discontinue en  $x = a$ , dire pourquoi.



**Exercice 3:** Complétez les graphiques suivants selon les indications et déterminez lesquelles de ces fonctions sont continues en  $a$ .

 <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math> existe, mais pas <math>f(a)</math></p>	 <p>b) <math>f(a)</math> et <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math> existent, mais <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)</math></p>
 <p>c) <math>f(a)</math> existe, mais pas <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math></p>	 <p>d) <math>f(a)</math> et <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math> existent, et <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math></p>

**Exercice 4:** Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes et leurs éventuels points de discontinuité:

$$a) f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ 2x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & \text{si } x < 2 \\ 7, & \text{si } x = 2 \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{si } x < -1 \\ 0, & \text{si } x = -1 \\ 1-x, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 3, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

**Exercice 5:** Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6}, & \text{si } x \neq -2 \\ \lambda, & \text{si } x = -2 \end{cases} \quad \text{Déterminer toutes les valeurs de } \lambda \text{ telles que la fonction soit continue en } x = -2$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{2x^2-7x-4}, & \text{si } x \neq 4 \\ \lambda, & \text{si } x = 4 \end{cases} \quad \text{Déterminer toutes les valeurs de } \lambda \text{ telles que la fonction soit continue en } x = 4$$

**Exercice 6:**

Esquisser le graphique d'une fonction qui soit continue partout sauf en  $x = 2$ .

**Exercice 7:**

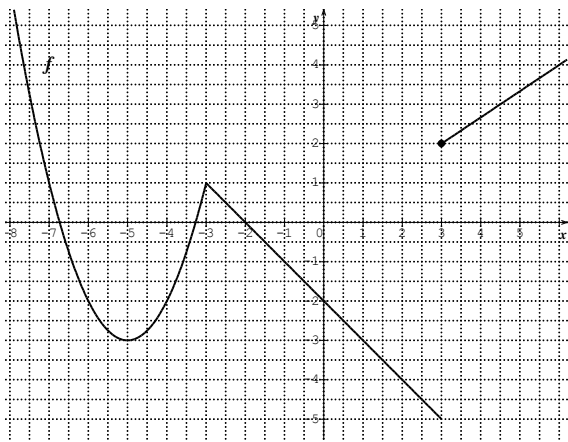
Inventer une fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

(Donner son expression algébrique)

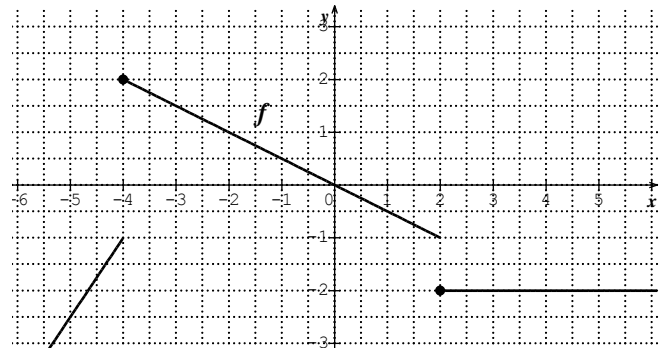
**Exercice 8:** La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminer, au vu de son graphique, les intervalles sur lesquels la fonction est continue:

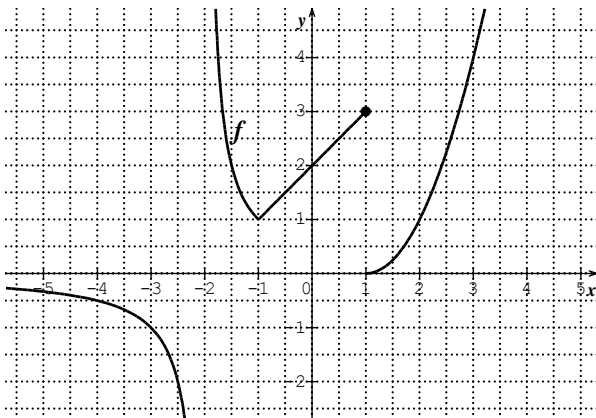
a)



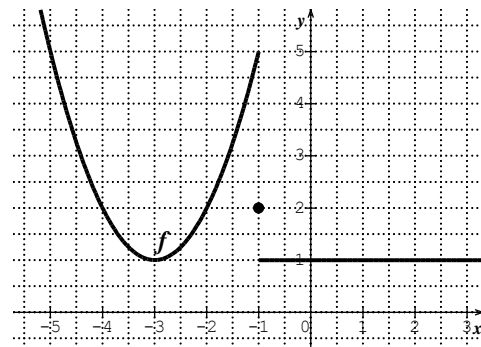
b)



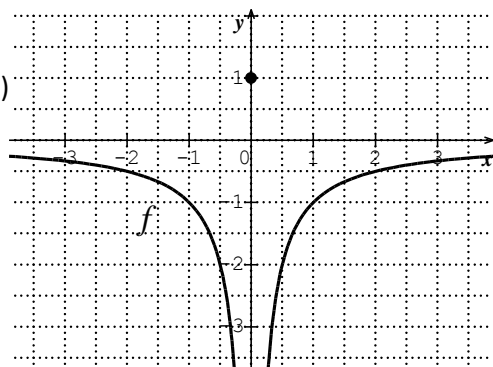
c)



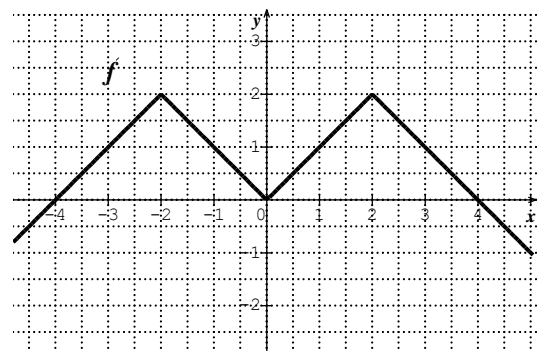
d)



e)

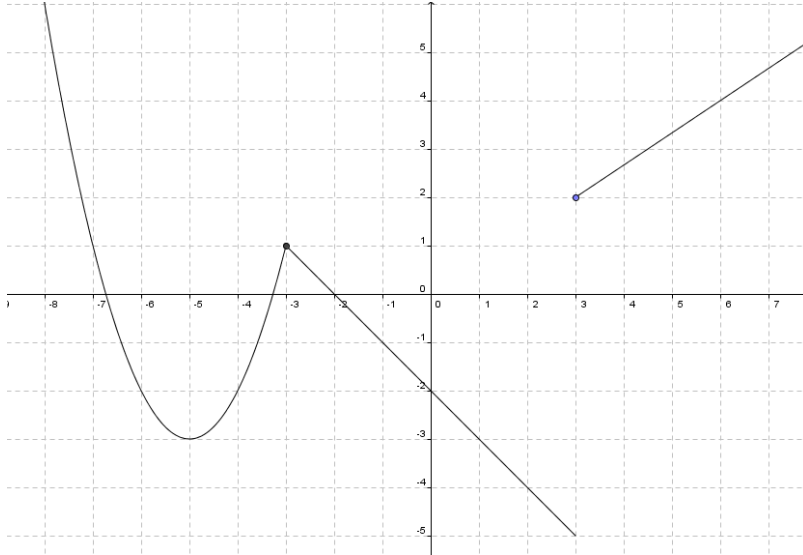


f)



## Corrigé Analyse Série 4:

### Exercice 1:



b)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = -3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$ ;

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  n'existe pas car:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -3 - 2 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

- c) 1. faux. pas continue en 3 donc pas continue sur  $\mathbb{R}$  2. vrai 3. vrai 4. faux 5. vrai 6. vrai

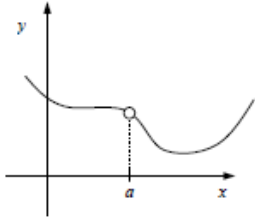
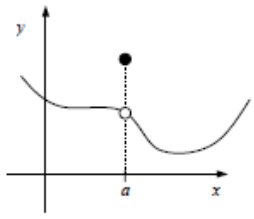
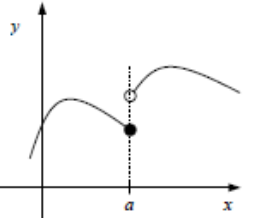
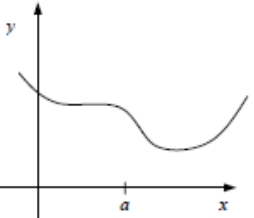
### Exercice 2:

- a) Continue b) Discontinue car  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  n'existe pas c) Discontinue car  $f(a)$  n'existe pas  
 d) Discontinue car  $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  e) Discontinue car  $f(a)$  n'existe pas et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  n'existe pas

### Exercice 3:

Les possibilités de compléter les graphiques suivants selon les indications sont infinies. Seul compte le comportement de la fonction au voisinage de  $a$ .

Seul la fonction du graphique d) satisfait les conditions de continuité en  $x = a$ , donc c'est la seule qui est continue en  $x = a$ .

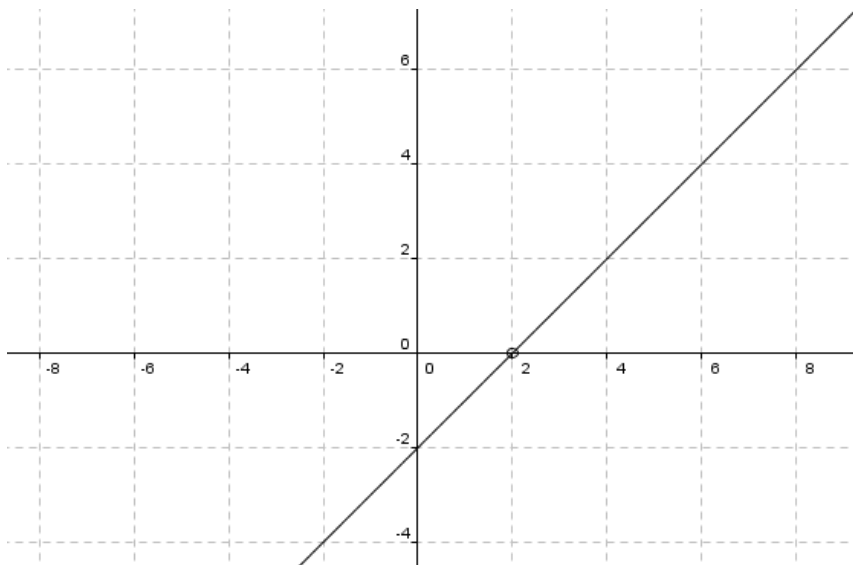
 <p>a) <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math> existe, mais pas <math>f(a)</math></p>	 <p>b) <math>f(a)</math> et <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math> existent, mais <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)</math></p>
 <p>c) <math>f(a)</math> existe, mais pas <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math></p>	 <p>d) <math>f(a)</math> et <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x)</math> existent, et <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)</math></p>

**Exercice 4:**

- a)  $D_f = \mathbb{R}$ . Cette fonction est continue en tout  $x \neq 0$ , car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs. Reste à l'étudier au voisinage de  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ , donc elle est aussi continue en  $x = 0$ . Conclusion, cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- b)  $D_f = \mathbb{R}$ .  $f$  est discontinue en 2 car la limite de  $f(x)$  en 2 n'existe pas (différente à gauche et à droite)
- c)  $D_f = \mathbb{R}$ .  $f$  est discontinue en -1 car la limite en -1 de  $f(x)$  n'existe pas.
- d)  $D_f = \mathbb{R}$ . pas de point de discontinuité. En  $x = 1$ , l'image vaut 3, la limite vaut 3 donc comme égalité entre l'image et la limite: la fonction est continue en 1.

**Exercice 5:**

- a) Pour que  $f$  soit continue en  $x = -2$ ,  $\lambda$  doit être égal à 1. Ainsi:  $f(-2) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$   
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- b)  $\lambda = 0$  pour que  $f$  soit continue en  $x = 4$ .  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

**Exercice 6:****Exercice 7:**

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2}$$

**Exercice 8:**

- a)  $[-8; 3[$  (ou  $] -\infty; 3[$ ) et  $[3; +\infty[$
- b)  $] -\infty; -4[$ ;  $[-4; 2[$  et  $[2; +\infty[$
- c)  $] -\infty; -2[$ ;  $] -2; 1[$  et  $]1; +\infty[$
- d)  $] -\infty; -1[$  et  $] -1; +\infty[$
- e)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ou  $] -\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$
- f)  $\mathbb{R}$