

Analyse Série 5

Ne pas résoudre les exercices sur l'énoncé. Répondre sur des feuilles quadrillées.

Exercice 1:

a) calculer la dérivée de f en a , puis l'équation de la droite tangente à f au point $(a; f(a))$

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = \sqrt{x}$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

4) $f(x) = -3x + 1$

5) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

b) A partir des fonctions 1), 2) et 3), compléter: "si $f(x) = \dots$ alors $f'(a) = \dots$ "

Exercice 2: On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

- a) Calculer le nombre dérivé de f en 2.
 - b) Calculer l'équation de la droite T , tangente à f au point $(2; f(2))$.
 - c) Dans un repère orthonormé, représenter f et T
 - d) Calculer l'équation de la droite T , tangente à f au point $(a; f(a))$
 - e) En vous aidant de la signification géométrique de $f'(a)$, déterminer le sommet de la parabole.
 - f) Calculer en quel(s) point(s) $(a; f(a))$ la tangente à f perpendiculaire à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 1$
Déterminer alors l'équation de cette (ces) tangente(s); représenter ensuite cette (ces) tangente(s) ainsi que f et la droite $y = -\frac{1}{4}x + 1$ dans un seul repère.
 - g) Calculer pour quelle(s) valeur(s) de a , la tangente à f au point $(a; f(a))$ contient le point $(2; 4)$
Déterminer alors l'équation de cette (ces) tangente(s); représenter ensuite cette (ces) tangente(s) ainsi que f dans un seul repère.
-

Exercice 3: On considère la fonction f définie par $f(x) = |x|$

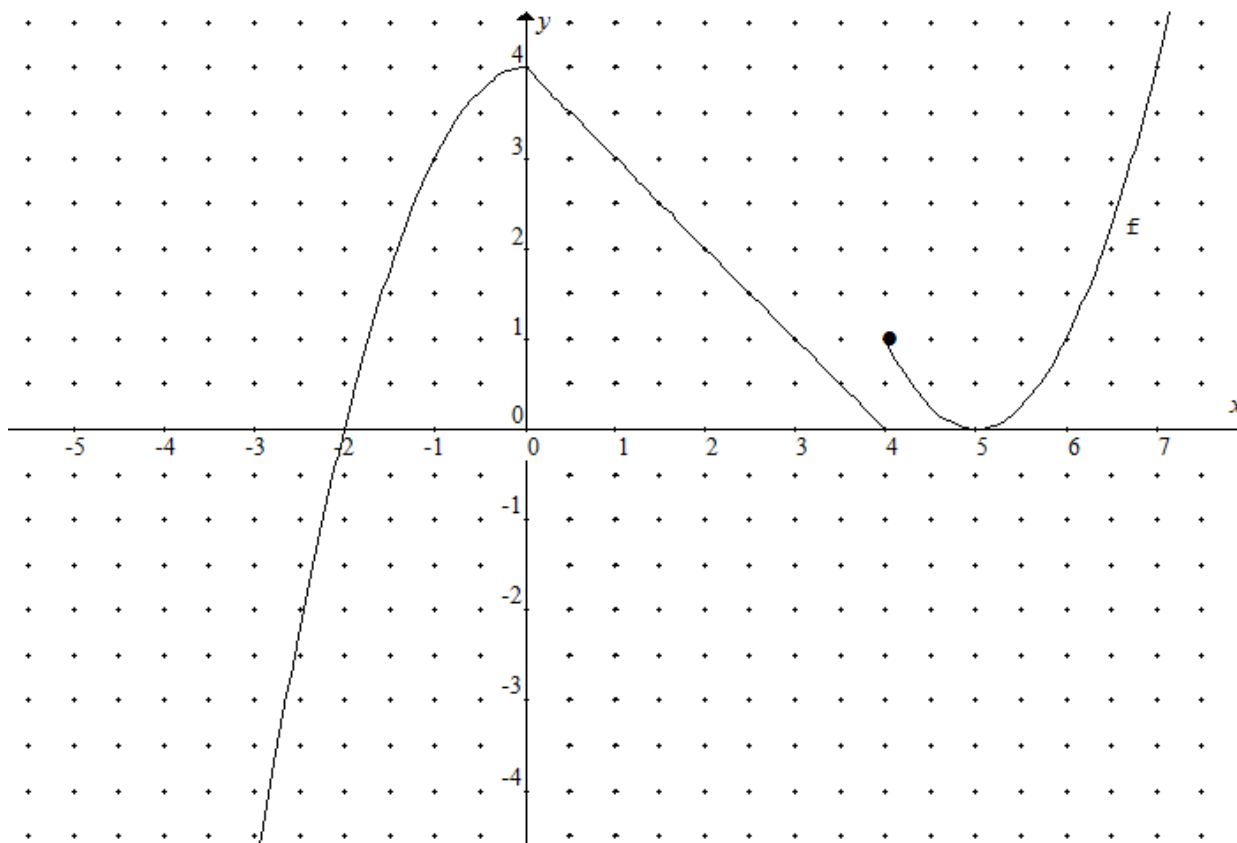
- a) Représenter f , puis, **d'après le dessin**, décider si f est dérivable en -2
Même question en remplaçant -2 par 3 puis par 0 .
 - b) Décider **par calcul** si f est dérivable en -2 , puis en 3 et enfin 0 .
-

Exercice 4:

- a) Représenter soigneusement la parabole d'équation $f(x) = x(x - 4)$
- b) A partir du graphique obtenu, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$
- c) Calculer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$
- d) Calculer $f'(a)$ pour un réel a quelconque
- e) Déterminer graphiquement puis par calcul un nombre a tel que $f'(a) = -1$

Exercice 5:

La fonction représentée ci-dessous est $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2; & \text{si } x \leq 0 \\ 4 - x; & \text{si } 0 < x < 4 \\ (x - 5)^2; & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



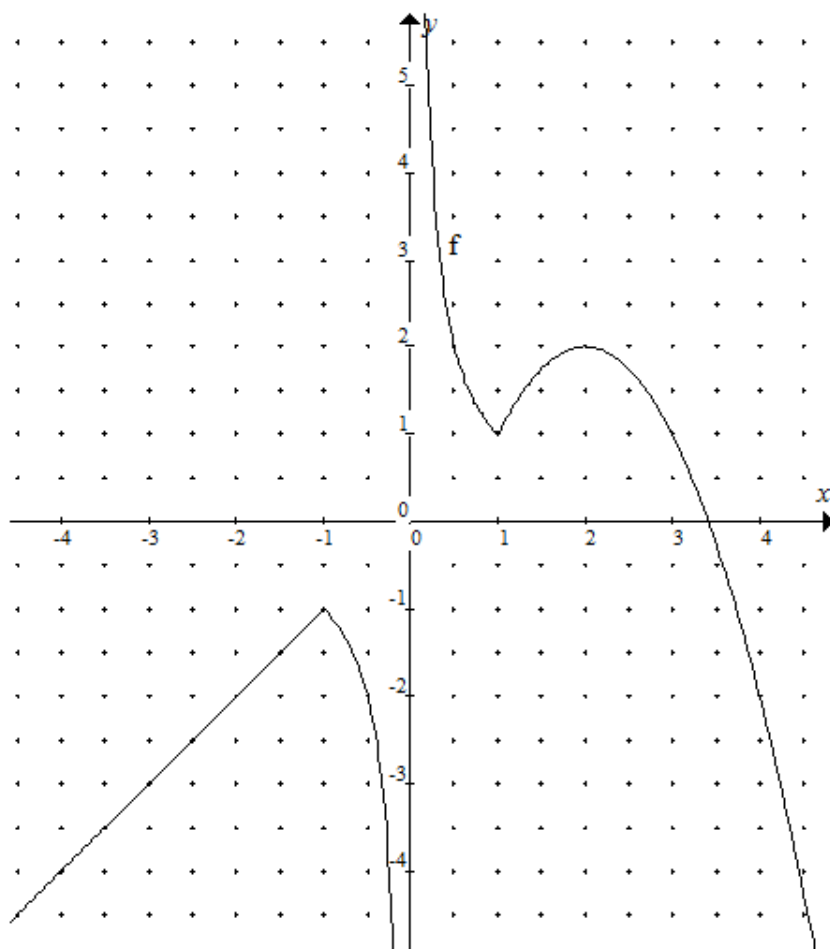
- Déterminer graphiquement puis par calcul $f'(-1)$, $f'(2)$ et $f'(5)$
- Quels sont les points en lesquels f n'est pas dérivable ?
- calculer $f'(0^-)$ et $f'(0^+)$ et donner une interprétation graphique de ces résultats.
- Même questions que sous c) mais en 4^- et en 4^+ .
- Sur quel domaine la dérivée de f est-elle positive ou nulle ?

Exercice 6: Calculer la dérivée de f au point a .

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = 2x^2 - x + 3, a = 1$ et a quelconque | 4) $f(x) = \frac{2x}{x+3}, a = -2$ et a quelconque |
| 2) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 10$ et a quelconque | 5) $f(x) = \sqrt{x} + 3, a$ quelconque |
| 3) $f(x) = 7 - 2x, a$ quelconque | 6) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, a = -2$ |

Exercice 7: Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1; & \text{si } x \leq 1 \\ x^2; & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Représenter f (1 unité = 2 carrés)
- Déterminer graphiquement $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$
- Déterminer par calcul $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$.

Exercice 8:

1) Compléter:

$$f'(-2) = \dots\dots\dots$$

$$f'(3) = \dots\dots\dots$$

2) Quels sont les points en lesquels f n'est pas dérivable ?

3) Déterminer:

$$f'(1^-); f'(1^+); f'(-1^-) \text{ et } f'(-1^+)$$

4) Quels sont les points en lesquels f admet une tangente de pente -2 ?5) Quelle est la solution de l'équation $f'(a) = 0$?**Exercice 9:** Calculer l'équation de la droite tangente au graphe de f en a

1) $f(x) = 4x - x^2$; $a = 1$ et $a = 2$

2) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; $a = -1$

Exercice 10: $f(x) = \frac{1}{2x}$ de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer $f'(a)$ pour un point a quelconque de $\mathbb{R}^*$
- 2) Quels sont les points a en lesquels f admet une tangente de pente -2 ?
- 3) Calculer l'équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 11: $f(x) = (x - 2)^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- 1) Représenter f ainsi que ses tangentes de pentes 1 ou -1
- 2) Calculer l'équation de la tangente de pente -1
- 3) Est-ce que $g(x) = 2x - \frac{9}{2}$ est une tangente à f ? (Justifier par calcul)

Exercice 12: $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ Quelles sont les tangentes à f qui contiennent le point $P(1; -3)$?

Corrigé Analyse Série 5

Ex 1: a)

$$1) f'(a) = 3a^2 \text{ et } y = 3a^2x - 2a^3$$

$$2) f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ et } y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{a}{2\sqrt{a}}$$

$$3) f'(a) = -\frac{1}{a^2} \text{ et } y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

$$4) f'(a) = -3 \text{ et } y = -3x + 1$$

$$b) \text{ Si } f(x) = x^n \text{ alors } f'(a) = na^{n-1}$$

$$5) f'(a) = -\frac{2}{(2a-3)^2}$$

$$\text{et } y = -\frac{2}{(2a-3)^2}x + (4a-3)/(2a-3)^2$$

$$6) f'(a) = \frac{a^2-2a}{(a-1)^2}$$

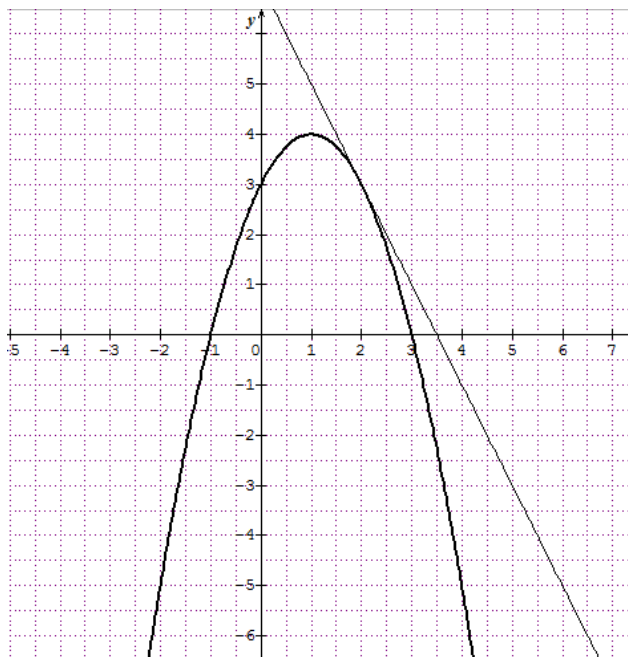
$$\text{et } y = \frac{(a^2-2a)}{(a-1)^2}x + \frac{a^2}{(a-1)^2}$$

Ex 2:

$$a) f'(2) = -2$$

$$b) y = -2x + 7$$

c)



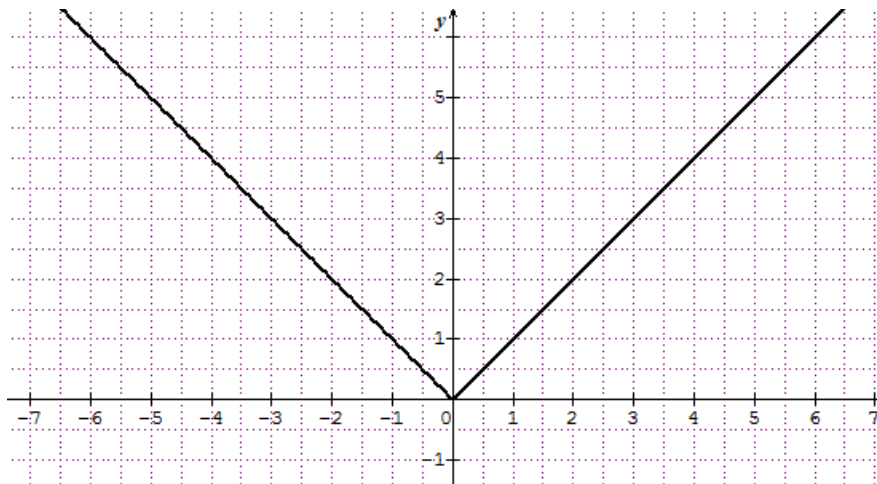
$$d) y = \underbrace{(-2a+2)}_{\text{pente}} x + \underbrace{a^2+3}_{\text{o à l'o.}}$$

$$e) f'(a) = 0 \text{ donc } -2a + 2 = 0 \text{ on trouve } a = 1 \text{ et donc le sommet est en } (1; 4) \text{ car } f(1) = 4$$

$$f) a = -1 \text{ donc } (-1; 0) \text{ et } y = 4x + 4$$

(droites perpendiculaires si pentes inverses et opposées l'une de l'autre)

$$g) a = 1 \text{ et } a = 3 \text{ donc } T_{(1;4)}(x) = 4 \text{ et } T_{(3;0)}(x) = -4x + 12$$

Ex 3:

- f dérivable en -2 et on trouve: $f'(-2) = -1$
- f dérivable en 3 et on trouve: $f'(3) = 1$
- f pas dérivable en 0 car:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 4:

b) et c) $f'(0) = -4$; $f'(2) = 0$; $f'(4) = 4$

d) $2a - 4$

e) $a = \frac{3}{2}$

Exercice 5:

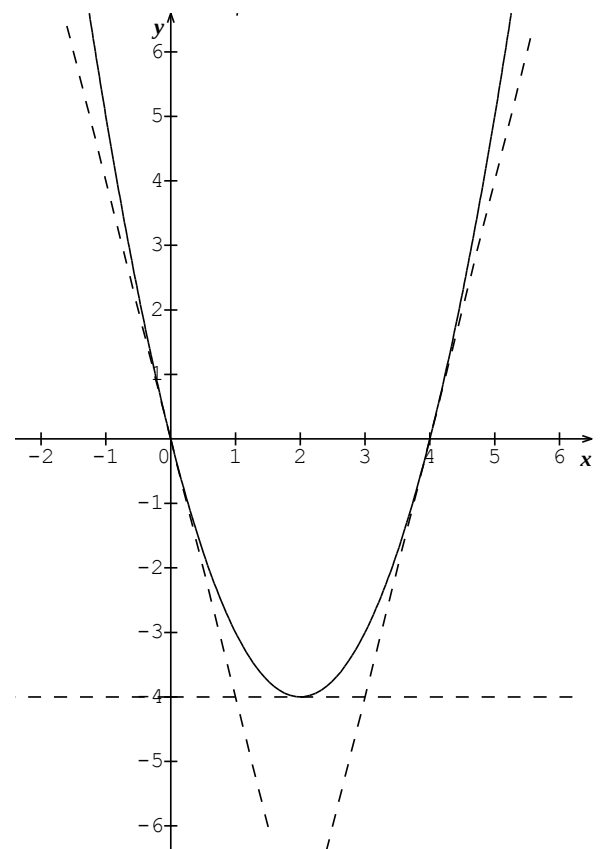
a) $f'(-1) = 2$; $f'(2) = -1$; $f'(5) = 0$

b) f n'est pas dérivable en 0 (f est anguleuse)
et en 4 (f est discontinue)

c) $f'(0^-) = 0$ et $f'(0^+) = -1$

d) $f'(4^-) = \infty$ et $f'(4^+) = -2$

e) $] -\infty; 0[\cup [5; \infty[$

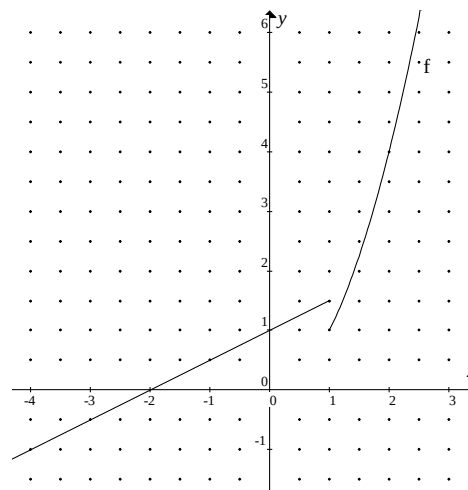
**Exercice 6:**

1) 3 et $4a - 1$ 2) $-\frac{1}{100}$ et $-\frac{1}{a^2}$

3) -2 4) 6 et $\frac{6}{(a+3)^2}$ 5) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 6) 0

Exercice 7:

$$f'(1^-) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(1^+) = -\infty$$

**Exercice 8:**

1) $f'(-2) = 1$ et $f'(3) = -2$

2) $-1; 0$ et 1

3) $f'(1^-) = -1; f'(1^+) = 2; f'(-1^-) = 1$ et $f'(-1^+) = -1$

4) en $-0,7$; en $0,7$ et en 3

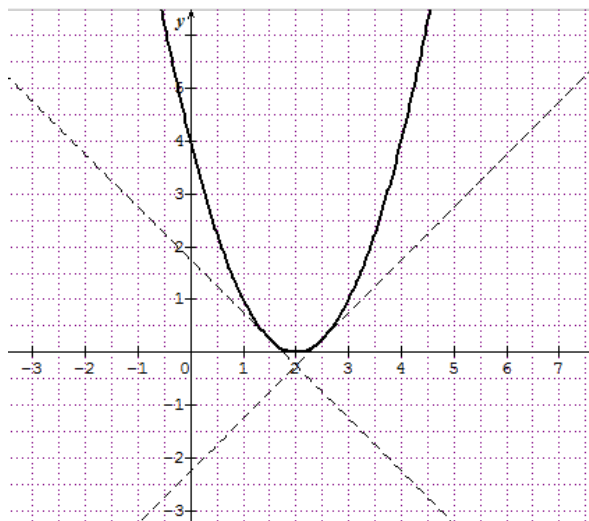
5) $S = \{2\}$

Exercice 9:

1) $T_1(x) = 2x + 1$, $T_2(x) = 4$ 2) $T_{-1}(x) = x + 3$

Exercice 10:

1) $f'(a) = -\frac{1}{2a^2}$ 2) $a = \pm \frac{1}{2}$ 3) $T_{-\frac{1}{2}}(x) = -2x - 2$ $T_{\frac{1}{2}}(x) = -2x + 2$

Exercice 11:

2) $T_{\frac{3}{2}}(x) = -x + \frac{7}{4}$ 3) Non: la seule tangente de pente 2 est: $T_3(x) = 2x - 5$

Exercice 12:

$$f'(a) = 2a \quad T_a(x) = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

Il faut que $(1; -3)$ soit un point de T_a donc que $T_a(1) = -3$

On trouve: $a = -1$ ou $a = 3$

$$T_{-1}(x) = -2x - 1 \text{ et } T_3(x) = 6x - 9$$

