

Analyse Série 8

Ne pas écrire sur l'énoncé

Exercice 1:

On considère la forme générale d'un polynôme de degré 1: $f(x) = px + q$

- Calculer $f'(5)$ (à l'aide de la définition de la dérivée)
- Calculer $f'(a)$ pour un nombre a quelconque (à l'aide de la définition de la dérivée)
- A partir du résultat obtenu en b), compléter l'affirmation suivante:
"Si f est un polynôme de degré 1 (une droite) alors $f'(a)$ est égale à ..."

Exercice 2:

En utilisant les résultats de l'exercice 1 (donc sans faire de calcul), déterminer $f'(a)$ pour les fonctions suivantes.

- $f(x) = 7x - 2$
- $f(x) = 4 - 3x$
- $f(x) = \frac{x-2}{3}$
- $f(x) = 10$

Exercice 3 :

En utilisant les résultats de l'exercice 1 ainsi que la formule pour la dérivée du produit, calculer les dérivées suivantes.

$$\text{Dérivée du produit : } (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- $f_1(x) = (2x - 3)(5x + 2)$ $f_1'(7) =$
- $f_2(x) = 5x(3x + 12)$ $f_2'(1) =$
- $f_3(x) = (8 - x)(x + 4)$ $f_3'(a) =$
- $f_4(x) = (10x + 3)^2$ $f_4'(a) =$

Exercice 4 :

- En quel point la fonction f_4 de l'exercice 3 admet-elle une tangente horizontale ?
- Quelle est la tangente de pente 2 de la fonction f_3 de l'exercice 3 ?

Exercice 5 :

Calculer $f'(x)$ (sans préciser le domaine de définition)

- $f(x) = -3x + 2$
- $f(x) = x^7 - 5x^4$
- $f(x) = 4 - x$
- $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$
- $f(x) = 5 + \sqrt{2}$
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f(x) = (5x - 2)^2$
- $f(x) = 4\sqrt{x} - 1$
- $f(x) = 4(1 - x)(x + 2)$
- $f(x) = 3 \cdot \frac{x-1}{4}$

Exercice 6 :Calculer $f'(x)$ (sans préciser le domaine de définition)

a) $f(x) = \sqrt{x}(1 - 2x)$

e) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

i) $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

f) $f(x) = \frac{x}{ax+b}$

j) $f(x) = -(1 - x^2)^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

g) $f(x) = \frac{3-x}{x^2-4}$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$

h) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

Exercice 7 :Calculer $f'(x)$ (sans préciser le domaine de définition)

a) $f(x) = (2x - 1)^5$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{4x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{1-x}$

e) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3$

g) $f(x) = (ax + b)^4$

c) $f(x) = (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}$

h) $f(x) = (ax + b)^n$

Exercice 8 :On considère $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

- Calculer le domaine et les zéros de f et de f'
- f admet-elle une tangente horizontale ?
- Calculer l'équation de la tangente à f en 0
- Déterminer les tangentes à f de pente -5

Exercice 9 :Soit $f(x) = 4 - x^2$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et $g(x) = (x - 2)^2$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

- Calculer le point a en lequel f et g admettent des tangentes parallèles
- Calculer les équations de ces tangentes
- Représenter f , g et les tangentes mentionnées

Exercice 10 :On considère la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ Que représente graphiquement la solution de l'équation $f'(x) = 0$?

Exercice 11 :

1) Les fonctions suivantes sont-elle dérivables au point a mentionné ? (Indiquer la méthode choisie pour répondre à cette question)

2) Calculer la fonction dérivée de f (attention au domaine de f')

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+4}, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{4}, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & \text{si } x < -3 \\ (x+3)^2, & \text{si } x \geq -3 \end{cases} \quad a = -3$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2+1}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad a = 0$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-2, & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad a = -1$$

Exercice 12 :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + 5$ de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

Calculer a et b de sorte que f admette la droite $y = 2x + 2$ comme tangente en 1

Déterminer pour les exercices 13 à 17:

a) $f'(x)$

b) Le domaine de f et de f' si précisé par **D**

Exercice 13 :

a) $f(x) = x^{12} + x$

f) $f(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6}$

b) $f(x) = -3x^7 + 6$ **D**

g) $f(x) = \sqrt[11]{x^{10}}$ **D**

c) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

h) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$

d) $f(x) = 1/x^8$

e) $f(x) = \frac{2c}{x^2}$ **D**

Exercice 14 :

a) $f(x) = \frac{2}{1+3x}$ **D**

f) $f(x) = \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$ **D**

b) $f(x) = (4-x^2)(1+5x)x$

g) $f(x) = \frac{4x^3}{a^3+x^3}$ **D**

c) $f(x) = x^4 \cos(x)$

h) $f(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

d) $f(x) = (4-x^2)/(4+x^2)$ **D**

e) $f(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$

Exercice 15 : De quelle fonction est-ce que les fonctions suivantes sont les dérivées ?

a) $f'(x) = 3x^2$

d) $f'(x) = 15x^3 - 2x + 3$

b) $f'(x) = 4x^5$

e) $f'(x) = 4x^6 + 5$

c) $f'(x) = 2x^2 + 3$

Exercice 16 : Calculer les fonctions $f'(x)$ et indiquer le domaine lorsqu'il est demandé (**D**)

a) $f(x) = (3x-1)^5$

e) $f(x) = \sqrt[4]{-x^2+3x-2}$ **D**

b) $f(x) = (-25x^3+5x)^4$

f) $f(x) = \tan(3-2x)$

c) $f(x) = \cos(ax)$

g) $f(x) = \sin(x^5)$

d) $f(x) = (\sin(x))^8$ **D**

- h) $f(x) = \sqrt[3]{\cos(x)}$ **D**
 i) $f(x) = \cos^3(x^2)$
 j) $f(x) = \sin((3 - x^3)^7)$
 k) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)$
- l) $f(x) = \sin^4(5 - 4x)$
 m) $f(x) = \cos(\sin(-2x^3))$
 n) $f(x) = \sin(\sqrt{5 - 8x})$

Exercice 17 :

- a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)(\tan^3(x) - \tan(x))$
 b) $f(x) = \sqrt{1 + \sin^2(x)}$
 c) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^3 + 3x)^2}$
 d) $f(x) = \frac{1}{(2-5x^7)^4}$ **D**
 e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4b^4 - x^4}}$
 f) $f(x) = (3x - 1)^5(-2x + 3)^3$
 g) $f(x) = \frac{(-5x+2)^6}{3x}$
 h) $f(x) = (\tan^2(x) + 1)^4$
 i) $f(x) = \sqrt[3]{((2x - 1)/(x + 1))}$
- j) $f(x) = x^3\sqrt{4 - x^2}$ **D**
 k) $f(x) = \left[\frac{1+x^2}{1+x}\right]^5$
 l) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ **D**
 m) $f(x) = tg(x) \cdot \cos(x)$
 n) $f(x) = \frac{(ax+2)^3}{(4-ax)^2}$
 o) $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{2\sin(x)+1}$
 p) $f(x) = (b + x) \cdot \sqrt{b - x}$ **D**

Exercice 18 : On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = 4/x^2 \text{ et } g(x) = x^2/4$$

- a) Calculer pour quelles valeurs de x , f et g admettent des tangentes parallèles.
 b) Calculer pour quelles valeurs de x , f et g admettent des tangentes perpendiculaires.
 c) Mêmes questions appliquées à $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 7$.

Exercice 19 : On considère la famille de fonctions définies par le modèle suivant :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

- a) Calculer pour quelle(s) valeur(s) de a et b la fonction f admet au point $(2; 4)$ une droite tangente parallèle à la droite d'équation $y = 6x + 2$.
 b) Calculer pour quelle(s) valeur(s) de a et b la fonction f admet en $x = 1$ la droite tangente t , d'équation $y = -3x + 1$.

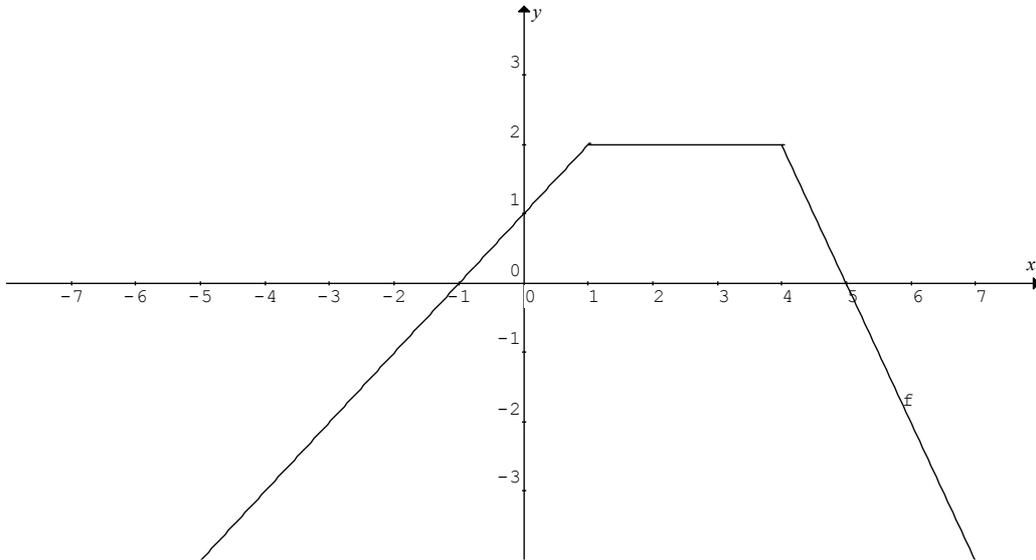
Exercice 20:

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes

- a) $f(x) = 5 \cdot \sin(2x + 1)$
 b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
 c) $f(t) = A \cdot \cos(at)$
 d) $f(u) = \cos(3u) + 4 \sin(u)$
- e) $f(x) = z \cdot \cos(x^2 + y)$
 f) $f(y) = z \cdot \cos(x^2 + y)$
 g) $f(z) = z \cdot \cos(x^2 + y)$

Exercice 21 :

A partir du graphe de la fonction f donné ci-dessous, tracer celui de f' sur le même graphique (attention au domaine de f')

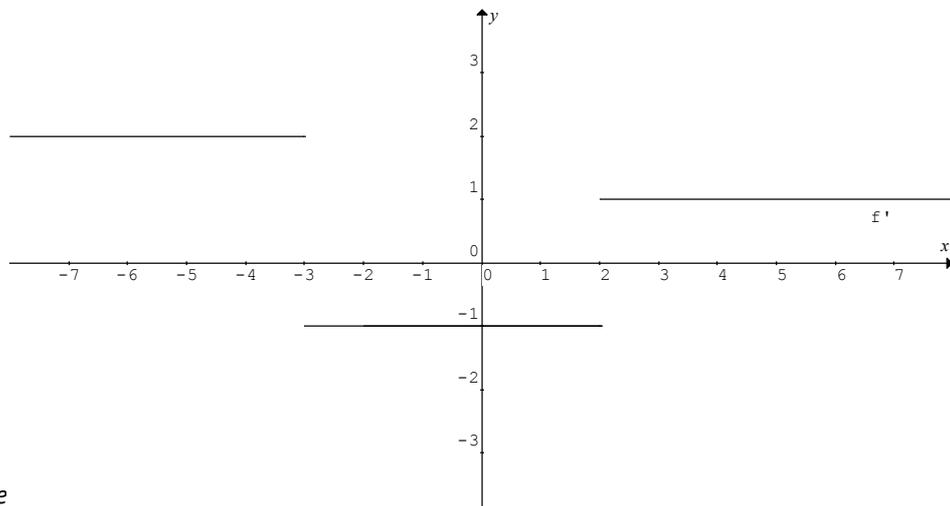
**Exercice 22 :**

Considérons $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

- Déterminer le domaine de définition et le(s) zéro(s) de f .
- Calculer la dérivée de la fonction f puis donner une réponse dans laquelle numérateur et dénominateur sont factorisés.
- Calculer le domaine et les zéros de cette dérivée.

Exercice 23 :

- A partir du graphe donné de f' , tracer celui de f sachant que celle-ci est continue et qu'elle contient le point $(-5; 0)$
- Déterminer l'équation de f .



Exercice 24:

La fonction h ci-dessous est définie à partir de deux fonctions positives et dérivables: f et g .

Exprimer la dérivée de h

$$h(x) = \sqrt{17f(x) + g^2(x)}$$

Exercice 25 :

Trouver une fonction f dont la dérivée est:

a) $f'(x) = -2$ b) $f'(x) = x$ c) $f'(x) = 1 - 2x$

(Indiquer toutes les possibilités)

Solutions Analyse Série 8

Ex 1: a) $f'(5) = p$ b) $f'(a) = p$ c) ... la pente de cette droite

Ex 2: a) $f'(a) = 7$ b) $f'(a) = -3$ c) $f'(a) = \frac{1}{3}$ d) $f'(a) = 0$

Ex 3: a) $f_1'(7) = 129$ b) $f_2'(1) = 90$ c) $f_3'(a) = -2a + 4$ d) $f_4'(a) = 200a + 60$

Ex 4: a) $a = -\frac{3}{10}$ (la dérivée doit être = 0) b) $T_1(x) = 2x + 33$ (il faut que $a = 1$ pour que la dérivée soit = 2)

Ex 5: a) -3 b) $7x^6 - 20x^3$ c) -1 d) $6x - 5$ e) 0 (f est constante) f) $2ax + b$ g) $10(5x - 2)$ h) $\frac{2}{\sqrt{x}}$

i) $-4(2x + 1)$ j) $\frac{3}{4}$

Ex 6: a) $\frac{1-2x}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$ b) $\frac{1}{(2-x)^2}$ c) $-\frac{5}{x^6}$ d) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ e) $-\frac{5}{(x-2)^2}$ f) $\frac{b}{(ax+b)^2}$ g) $\frac{x^2-6x+4}{(x^2-4)^2}$ h) $2x + \frac{1}{x^2}$

i) $-\frac{ax^2+2bx+a}{(x^2-1)^2}$ j) $4x(1-x^2)$

Ex 7: a) $10(2x-1)^4$ b) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ c) $3x\sqrt{x^2+3}$ d) $-\frac{1}{(2x+3)\sqrt{2x+3}}$ e) $\frac{-9(x+1)^2}{(x-2)^4}$ f) $\frac{4}{3}(4x+1)^{-\frac{2}{3}}$

g) $4a(ax+b)^3$ h) $an(ax+b)^{n-1}$

Ex 8: a) $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $Z_f = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $Z_{f'} = \emptyset$, $f'(x) = -\frac{5}{(x-2)^2}$ b) non car f' ne s'annule pas

c) $T_0(x) = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$ d) $T_1(x) = -5x + 2$ $T_3(x) = -5x + 22$

Ex 9: a) $a = 1$ b) $T_1(x) = -2x + 5$ (pour f) $T_1(x) = -2x + 3$ (pour g)

Ex 10: Cette solution est la première coordonnée du sommet de la parabole f

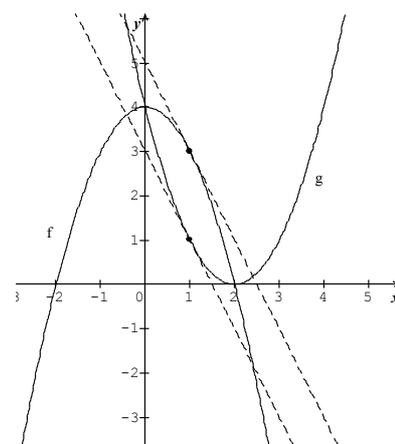
Ex 11:

a) $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ f n'est pas dérivable en 0

b) $f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ f est dérivable en 0

c) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+3)^2}, & \text{si } x < -3 \\ 2x+6, & \text{si } x > -3 \end{cases}$ f n'est pas dérivable en -3

d) $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{si } x < -1 \\ 2x, & \text{si } x > -1 \end{cases}$



Ex 12: Il faut que $f'(1) = 2$ et que $f(1) = T(1) = 4$

Il s'agit donc de résoudre un système de deux équations dont les inconnues sont a et b :

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b + 5 = 4 \end{cases} \text{ La solution de ce système est } a = 3 \text{ et } b = -4.$$

La fonction f est donc $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

Ex 13: a) $f'(x) = 12x^{11} + 1$ b) $f'(x) = -21x^6$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ c) $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
d) $f'(x) = -\frac{8}{x^9}$ e) $f'(x) = \frac{-4c}{x^3}$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^*$ f) $f'(x) = -\frac{5}{x^6} + \frac{6}{x^7}$ g) $f'(x) = \frac{10}{11\sqrt[11]{x}}$ $D_f = \mathbb{R}^*$ $D_{f'} = \mathbb{R}^*$
h) $f'(x) = \frac{19}{10}\sqrt[10]{x^9}$

Ex 14: a) $f'(x) = -\frac{6}{(1+3x)^2}$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ b) $f'(x) = -20 - 3x^2 + 40x + 4$
c) $f'(x) = 4x^3 \cos(x) - x^4 \sin(x)$ d) $f'(x) = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}$ e) $f'(x) = -\frac{1}{1+\sin(x)}$ f) $f'(x) = -\frac{2 \cos(x)}{(\sin(x)-1)^2}$
 $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ g) $f'(x) = \frac{12a^3x^2}{(a^3+x^3)^2}$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt[3]{-a^3}\right\}$
h) $f'(x) = \frac{1}{(\sin(x)+\cos(x))^2}$

Ex 15: a) $f(x) = x^3 + c$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^6 + c$ c) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x + c$ d) $f(x) = \frac{15}{4}x^4 - x^2 + 3x + c$
e) $\frac{4}{7}x^7 + 5x + c$

Ex 16: a) $f'(x) = 15(3x-1)^4$ b) $f'(x) = 20(-25x^3+5x)^3(-15x^2+1)$ c) $f'(x) = a \sin(ax)$
d) $f'(x) = 8 \sin^7(x) \cos(x)$ $D_f = D_{f'} = \mathbb{R}$ e) $f'(x) = \frac{-2x+3}{4\sqrt[4]{(-x^2+3x-2)^3}}$ $D_f = [1; 2]$ $D_{f'} =]1; 2[$
f) $f'(x) = -\frac{2}{\cos^2(3-2x)}$ g) $f'(x) = \cos(x^5) 5x^4$ h) $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x)}}$ $D_f = \mathbb{R}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
i) $f'(x) = -6 \cos^2(x^2) \sin(x^2) x$ j) $f'(x) = -21x^2 \cos((3-x^3)^7) (3-x^3)^6$ k) $f'(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)(2-x)^3}$
l) $f'(x) = -16 \sin^3(5-4x) \cos(5-4x)$ m) $f'(x) = 6x^2 \sin(\sin(-2x^3)) \cos(-2x^3)$
n) $f'(x) = \frac{-4 \cos(\sqrt{5-8x})}{\sqrt{5-8x}}$

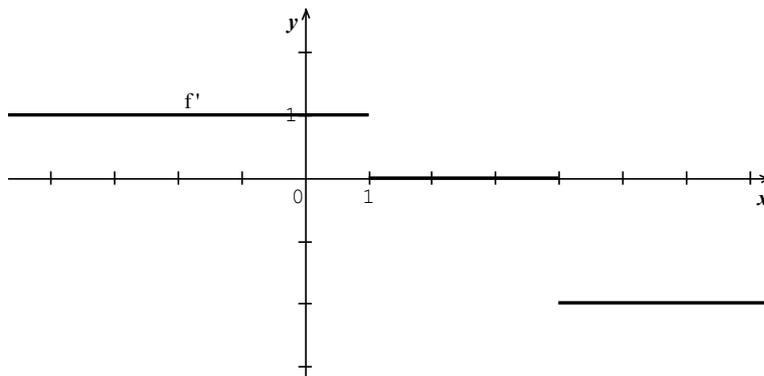
Ex 17: a) $f'(x) = \frac{1}{3}(1 + \tan^2(x))(3 \tan^2(x) - 1)$ b) $f'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$ c) $f'(x) = \frac{2(2x^2+1)}{\sqrt[3]{2x^3+3x}}$
d) $f'(x) = \frac{140x^6}{(2-5x^7)^5}$ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt[7]{\frac{2}{5}}\right\}$ e) $f'(x) = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(4b^4-x^4)^4}}$ f) $f'(x) = 3(3x-1)^4(-2x+32)(-16x+17)$
g) $f'(x) = \frac{-(-5x+2)^5(30x+1)}{3x^2}$ h) $f'(x) = 8 \tan(x) (1 + tg^2(x))^4$ i) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2(x+1)^4}}$
j) $3x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{x^4}{\sqrt{4-x^2}}$ k) $\frac{5x(1+x^2)^4}{(1+x)^5}$ l) $-\frac{x}{\sqrt{x(x-\sqrt{x})^2}}$ m) $\cos(x)$ n) $\frac{a(ax+2)^2(12-3ax+2ax^2+4x)}{4-ax}$
o) $\frac{3 \cos(x)}{(2 \sin(x)+1)^2}$ p) $-\frac{2x}{\sqrt{b-x}}$

Ex 18: a) $f'(x) = g'(x)$ impossible b) $f'(x) = -\frac{1}{g'(x)} \Leftrightarrow x = \pm 2$ c) a) $x = 2$ b) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{8}$

Ex 19: a) $\begin{cases} f(2) = 4 \\ f'(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b = 4 \\ 12 + 4a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \end{cases}$ l'éq. de la tg: $y = 6x - 8$ b) $a = -3, b = -3$

Ex 20: a) $f'(x) = 10 \cos(2x + 1)$ b) $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ c) $f'(t) = -Aa \sin(at)$ d) $f'(u) = 4 \cos(u) - 3 \sin(3u)$ e) $f'(x) = -2xz \sin(x^2 + y)$ f) $f'(y) = -z \sin(x^2 + y)$ g) $f'(z) = \cos(x^2 + y)$

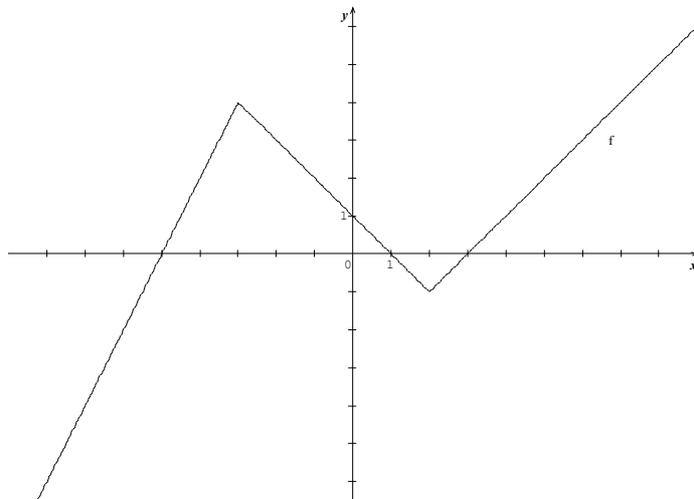
Ex 21:



f' n'est pas définie en 1 ni en 4

Ex 22: a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ $Z_f = \{0\}$ b) $f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x+2)^2(x-2)^2}$ c) $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ $Z_{f'} = \{-2\sqrt{3}; 0; 2\sqrt{3}\}$

Ex 23:



Ex 24: $h'(x) = \frac{17f'(x) + 2g(x)g'(x)}{2\sqrt{17f(x) + g^2(x)}}$

Ex 25: a) $f(x) = -2x + c$ b) $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$ c) $f(x) = x - x^2 + c$