Analyse combinatoire Série 4

Exercice 1 :

Un enfant a 10 cubes, 5 rouges, 3 bleus et 2 jaunes. De combien de manières peut-il les ranger les uns à côtés des autres ?

Exercice 2 :

Pour chacune des trois questions a), b) et c) ci-dessous, envisagez les deux cas:

cas 2.1) on distingue les garçons entre eux et les filles entre elles;

(quand on connaît bien les triplés et les jumelles, plus possible de les confondre)

cas 2.2) on ne distingue pas les garçon entre eux, ni les filles entre elles.

(quand on vient de rencontrer des jumeaux et des triplés, on n'arrive pas tout de suite à faire une différence entre eux)

a) De combien de façon différentes 3 garçons (des triplés) et 2 filles (des jumelles) peuvent-ils prendre place sur un banc ?

b) de combien de façons peuvent-ils s'asseoir si les garçons sont les uns à côté des autres et les filles les unes à côté des autres ?

c) Même question si les filles seulement sont l'une à côté de l'autre ?

Exercice 3 :

12 joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun de autres joueurs. Combien y a-t-il de parties disputées ?

Exercice 4 :

Une maîtresse de maison a 11 amis très proches, elle désire en inviter 5 à dîner :

a) De combien de manières peut-elle choisir les 5 ?

b) On suppose que 2 de ces amis ne peuvent venir qu'ensemble *(exemple: un couple),* combien y a-t-il alors de possibilités ?

c) Si 2 d'entre eux se détestent et ne peuvent être invités ensemble, qu'obtient-on ?

Exercice 5 :

Pour former une équipe de 5 joueurs, un professeur d'éducation physique peut choisir parmi les 15 élèves de la classe A et les 12 élèves de la classe B. De combien de manières peut-il former son équipe si:

a) Il choisit exactement 3 élèves de la classe A ?

b) Il choisit au moins 3 élèves de la classe A ?

c) Il choisit au plus 3 élèves de la classe A ?

d) Il choisit 5 élèves de la même classe ?

e) Il choisit au moins un élève dans chaque classe ?

Exercice 6 :

A partir des 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de "mots" de 3 lettres :

a) Avec répétition de lettres ?

b) Sans répétition ?

c) Sans répétition et commençant par une des six voyelles "A E I O U Y" ?

d) Sans répétition et contenant la lettre S ?

Exercice 7 :

a) Avec les lettres du mot LOGIQUE, combien de "mots" de 7 lettres différentes peut-on écrire ?

b) Parmi ces "mots", combien commencent par G ?

c) Combien commencent par deux consonnes et finissent par deux voyelles ?

Exercice 8 :

Un ensemble de 9 cartes sans répétitions et sans ordre s'appelle une main. On dispose d'un jeu de 36 cartes:

a) Combien de mains différentes existe-t-il ?

b) Combien de mains contiennent exactement 3 cœurs, 2 carreaux et 2 piques ?

c) Combien de mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?

d) Combien de mains contiennent au mois 3 as ?

e) Combien de mains contiennent au moins un as ?

Exercice 9 :

On veut ranger sur un rayon 7 livres de cuisine, 5 livres de physique et 6 livres de chimie. De combien de façon peut-on le faire si on veut placer les livres traitant du même sujet les uns à côté des autres ?

Exercice 10 :

a) De combien de manières différentes peut-on écrire les lettres A, B, C, D, E et F (dans tous les ordres possibles) ?

b) Et si A doit être placé avant F (mais pas obligatoirement juste avant) ?

Exercice 11 :

A partir d'un ensemble de 10 éléments, combien peut-on former de sous-ensembles

a) de 4 éléments ? b) de 6 éléments ?

Exercice 12 :

Vingt antennes indiscernables les unes des autres sont alignées. Six d'entre elles sont défectueuses. Deux antennes défectueuses ne doivent jamais être voisines sous peine d'interrompre les communications. Combien existe-t-il de configurations permettant la communication ?

Exercice 13 :

On tire simultanément 2 cartes d'un jeu de poker. Calculer le nombre de possibilités d'avoir

a) 2 as

b) 2 cœurs

c) exactement un as

d) aucun cœur

e) exactement un cœur

Exercice 14 :

On considère 10 pointes distincts, A, B, ... , sur un cercle.

a) Combien de segments peut-on former avec ces points ?

b) Combien d'entre eux ne contiennent ni A, ni B ?

c) Combien de triangles peut-on former avec ces points ?

d) Combien de ces triangles ont pour sommet le point A ?

e) Combien de ces triangles ont pour côté le segment $[AB]$?

Exercice 15 :

On fabrique un bracelet en mettant 12 perles de couleurs différentes sur un fil élastique circulaire.

Combien de bracelets différents peut-on ainsi former ?

Plus d'exercices ? Voir la monographie de la CRM n°26, Probabilités, p. 14-20

Solutions :

Ex 1: $\bar{P}_{10}(5;3;2) = 2520$ **Ex 2: 2.1)** a) $P_5 = 120$ b)$P_2 \cdot P_3 \cdot P_2 = 24$ c) $P_4 \cdot P_2 = 48$ **2.2)** a) $\overline{P_5}(3;2) = 10$ b) $P_2 = 2$ c) $\overline{P_4}(3;1) = 4$ **Ex 3:** $C_2^{12} = 66$ **Ex 4:** a) $C_5^{11} = 462$ b) si le duo vient: $C_2^2 \cdot C_3^9 = 84$ / si le duo ne vient pas: $C_0^2 \cdot C_5^9 = 126$ / toutes les alternatives: $84 + 126 = 210$ c) un vient: $C_1^2 \cdot C_4^9 = 252$ / aucun des deux ne vient: $C_0^2 \cdot C_5^9 = 126$ / toutes les alternatives: $126 + 252 = 378$
Ex 5: a) $C_3^{15} C_2^{12} = 30'030$ b) $C_3^{15} \cdot C_2^{12} + C_4^{15} \cdot C_1^{12} + C_5^{15} \cdot C_0^{12} = 49'413$
c) $C_3^{15} \cdot C_2^{12} + C_2^{15} \cdot C_3^{12} + C_1^{15} \cdot C_4^{12} + C_0^{15} \cdot C_5^{12} = C_5^{27} - C_4^{15} \cdot C_1^{12} - C_5^{15} \cdot C_0^{12} = 61'347$ d) $C_5^{15} \cdot C_0^{12} + C_0^{15} \cdot C_5^{12} = 3'795$ e) $C_5^{27} - C_5^{15} \cdot C_0^{12} - C_0^{15} \cdot C_5^{12} = 76'935$ **Ex 6:** a) $\overline{A_3^{26}} = 17'576$
b) $A_3^{26} = 15'600$ c) $6 \cdot 25 \cdot 24 = 3'600$ d) $A_1^3 \cdot A_2^{25} = 1'800$ (choisir 1 place pour le s et les 2 lettres)
Ex 7: a) $P_7 = 5040$ b) $P_6 = 720$ c) $A_2^3 \cdot P_3 \cdot A_2^4 = 432$ **Ex 8:** a)$C_9^{36} = 94'143'280$
b) $C_3^9 \cdot C_2^9 \cdot C_2^9 \cdot C_2^9 = 3'919'104$ c) $C_3^4 \cdot C_2^4 \cdot C_4^{28} = 491'400$ d) $C_3^4 \cdot C_6^{32} + C_4^4 \cdot C_5^{32} = 3'826'144$
e) $C_9^{36} - C_0^4 \cdot C_9^{32} = 66'094'480$
Ex 9: $P_3 \cdot P_7 \cdot P_5 \cdot P_6 = 2'612'736'000$ (choix de la place, choix des livres à l'intérieur de chaque catégorie)
Ex 10: a) 720 b) 360 **Ex 11:** a) 210 b) 210 **Ex 12:** 5005 **Ex 13 :** a) 6 b) 78 c) 192 d) 741 e) 507
Ex 14: a) 45 b) 28 c) 120 d)36 e) 8 **Ex 15:** $\frac{11!}{2}$

Solutions détaillées (Bernard Gisin):

Ex 1:

Permutation avec répétitions : $\overline{P}(5;3;2) = \dfrac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!} = 2'520$

Ex 2:

.1) Si on distingue les personnes entre elles :

a) $P_5 = 5! = 120$

b) on a deux blocs G1-G2-G3 et F1-F2, il y a donc P_2 façons de placer ces deux blocs et à l'intérieur des blocs, on permute les personnes, donc en tout : $P_2 \cdot P_3 \cdot P_2 = 2!\cdot 3!\cdot 2! = 24$

c) on a 3 objets G1, G2, G3 et un bloc F1-F2, donc 4 objets, mais les filles peuvent permuter entre elles, donc en tout : $P_4 \cdot P_2 = 4!\cdot 2! = 48$

.2) Si on ne distingue pas les personnes entre elles, mais seulement F ou G :

a) $\overline{P}(3;2) = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

b) on a deux blocs G-G-G et F-F, il y a donc P_2 façons de placer ces deux blocs et à l'intérieur de chaque bloc pas de permutations car **objets identiques**, donc : $2! = 2$

c) on a **3 objets identiques G** ; **G** ; **G** et un bloc **F-F de 2 objets identiques** aussi, donc 4 objets en tout, ce qui donne : $\overline{P}(3;1) = \dfrac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$

Ex 3:

L'ordre des deux joueurs participant à une partie donnée ne compte pas, donc c'est une combinaison : $C_2^{12} = \dfrac{12!}{10!\cdot 2!} = 66$

Ex 4:

a) L'ordre des invités ne compte pas, donc c'est une combinaison : $C_5^{11} = \dfrac{11!}{6! \cdot 5!} = 462$

b) Les 2 amis forment un bloc, donc deux alternatives :
ou bien ils viennent ensemble ; ou bien ils ne viennent ni l'un ni l'autre.
Calcul de la 1ère alternative : le bloc vient, il reste 3 amis à inviter sur un effectif de 9

$$C_2^2 \cdot C_3^9 = \frac{2!}{0! \cdot 2!} \cdot \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 1 \cdot 84 = 84$$

Calcul de la 2ème alternative : le bloc ne vient pas, il reste 5 amis à inviter sur un effectif de 9

$$C_0^2 \cdot C_5^9 = \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 1 \cdot 126 = 126$$

Si la maîtresse de maison veut envisager TOUTES les alternatives : 84 + 126 = 210.

<u>**Attention aux signes**</u> + et • : pourquoi l'un et l'autre ?

c) Les deux amis D1 et D2 se détestent, donc 2 alternatives :
ou bien un seul des deux D vient ; ou bien aucun des deux D ne vient.
Calcul de la 1ère alternative : un D vient, il reste 4 amis à inviter sur un effectif de 9

$$C_1^2 \cdot C_4^9 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 2 \cdot 126 = 252$$

Calcul de la 2ème alternative : aucun D ne vient, il reste 5 amis à inviter sur un effectif de 9

$$C_0^2 \cdot C_5^9 = \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 1 \cdot 126 = 126$$

Si la maîtresse de maison veut envisager TOUTES les alternatives : 126 + 252 = 378.

Ex 5

a) Il choisit 3 élèves sur les 15 élèves de A et donc encore 2 élèves sur les 12 élèves de B.
(L'ordre du choix ne compte pas, seuls les objets sélectionnés comptent) :

$$C_3^{15} \cdot C_2^{12} = \frac{15!}{12! \cdot 3!} \cdot \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 30'030$$

b) **Ou bien {(3 élèves de A) et (2 de B)}, ou bien {(4 élèves de A) et (1 de B)}, ou bien {(5 élèves de A) et (0 de B) }**
ce qui donne : $C_3^{15} \cdot C_2^{12} + C_4^{15} \cdot C_1^{12} + C_5^{15} \cdot C_0^{12} = 49'413$

c) **Ou bien {(3 A) et (2 B)}, ou bien {(2 A) et (3 B)}, ou bien {(1 A) et (B)}, ou bien {(0 A) et (5 B)}** :
$C_3^{15} \cdot C_2^{12} + C_2^{15} \cdot C_3^{12} + C_1^{15} \cdot C_4^{12} + C_0^{15} \cdot C_5^{12} = 455 \cdot 66 + 105 \cdot 220 + 15 \cdot 495 + 1 \cdot 792 = 61'347$

Meilleure méthode : il a tous les choix possibles **(5 élèves à choisir parmi 27 (15+12 !!!)** soit C_5^{27}
moins les choix { **(4A et 1B) ou (5A et 0B)** }
Donc : $C_5^{27} - C_4^{15} \cdot C_1^{12} - C_5^{15} \cdot C_0^{12} = 80'730 - 16'380 - 3'003 = 61'347$

d) ou bien **(5A et 0B)** , ou bien **(0A et 5B)** : $C_5^{15} \cdot C_0^{12} + C_0^{15} \cdot C_5^{12} = 3'003 + 792 = 3'795$

e) on pourrait écrire tous les termes correspondants, ce serait long. **Meilleure méthode** :
il a tous les choix possibles C_5^{27} ***moins*** les choix { **(5A et 0B) ou (0A et 5B)** }
Donc : $C_5^{27} - C_5^{15} \cdot C_0^{12} - C_0^{15} \cdot C_5^{12} = 80'730 - 3'003 - 792 = 76'935$

L'ordre compte, arrangements Voyelles : A E I O U Y

a) $\overline{A}_3^{26} = 26^3 = 17'576$

b) $A_3^{26} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15'600$

c) $6 \cdot 25 \cdot 24 = 3'600$

d) $1 \cdot 25 \cdot 24 + 25 \cdot 1 \cdot 24 + 25 \cdot 24 \cdot 1 = 1'800$

il reste deux lettres à choisir et le S peut occuper 3 places possibles.

Ex 7

a) $P_7 = 7! = 5'040$

b) G ? ? ? ? ? ? il reste 6 lettres à permuter donc : $P_6 = 6! = 720$

c) C1 C2 ? ? ? V1 V2 L O G I Q U E = sept lettres = 4 voyelles + 3 consonnes

$A_2^3 \cdot P_3 \cdot A_2^4 = 6 \cdot 6 \cdot 12 = 432$ **les trois lettres restantes ? ? ? au milieu sont sans choix, mais à permuter**

Ex 8

Dans une main, l'ordre ne compte pas : combinaisons

a) $C_9^{36} = 94'143'280$

b) $C_3^9 \cdot C_2^9 \cdot C_2^9 \cdot C_2^9 = 3'919'104$ **il ne faut pas oublier les 2 cartes à choisir en trêfle !**

c) $C_3^4 \cdot C_2^4 \cdot C_4^{28} = 491'400$ **il ne faut pas oublier les 4 cartes à choisir ni en AS, ni en ROI !**

d) Au moins 3 AS signifie « 3 AS <u>ou</u> 4 AS », donc $C_3^4 \cdot C_6^{32} + C_4^4 \cdot C_5^{32} = 3'826'144$

e) Nbre de mains avec **au moins 1 AS = (nombre total de mains)** ***moins*** **(nombre de mains sans AS)**

Donc : $C_9^{36} - C_0^4 \cdot C_9^{32} = 94'143'280 - 28'048'800 = 66'094'480$

Naturellement, on aurait pu additionner le nombre de mains avec 1 As + celui avec 2 As + …

Ex 9

On a : un bloc de 7 K(itchen), un bloc de 5 P(hysique) et un bloc de 6 C(himie).

On peut permuter les trois blocs entre eux et les livres à l'intérieur de chaque bloc :

Nombre total d'alignements = $P_3 \cdot P_7 \cdot P_5 \cdot P_6 = 3! \cdot 7! \cdot 5! \cdot 6! = 2'612'736'000$