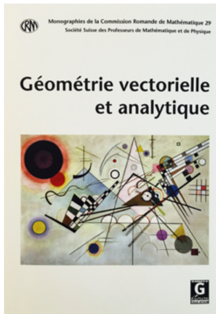
Géométrie vectorielle de l'espace

L'étude de la géométrie fit un grand pas en avant lorsqu'on constata que les points du plan ou de l'espace peuvent être représentés par des couples ou des triplets de nombres et que les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Cette idée fut initiée par le mathématicien français René Descartes (1596-1650) en 1637 dans l'appendice de son livre: *Discours de la méthode.* Cette utilisation de l'algèbre par la géométrie se nomme : la **géométrie analytique**.

L'idée de base de la géométrie analytique est que les études géométriques peuvent être réalisées au moyen de calculs algébriques. On peut dire pour simplifier que c'est de la géométrie sans dessin !

Puisque ce chapitre est au programme de 2ème année en dimension 2 (dans le plan), nous allons passer à la dimension 3 (dans l'espace) en rappelant ce qui a été étudié.



Matériel

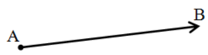
- CRM n°29, *Géométrie Vectorielle et Analytique de l'Espace* (pour références de ce cours, exercices supplémentaires)
- Règle, crayon, gomme, calculatrice.
- Ce polycopié et les séries distribués en cours.

1. L'espace affine

1.1 Repère : définitions et notations

Définition : Un ***bipoint*** est un couple ordonné de points $(A;B)$. Le point A est son ***origine*** et le point B est son ***extrémité***.

Illustration :



Deux bipoints $(A;B)$ et $(C;D)$ ont la même ***direction*** si la droite passant par A et B est parallèle à la droite passant par C et D.

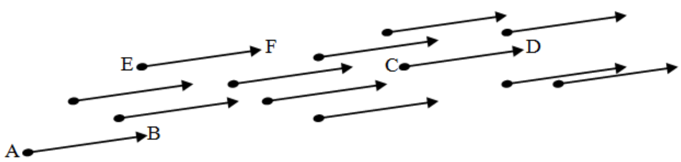
Deux bipoints $(A;B)$ et $(C;D)$ de même direction peuvent avoir le même sens ou des ***sens*** opposés.

La l***ongueur*** d'un bipoint $(A;B)$ est la distance entre A et B, notée $\delta(A;B)$.

Définition : Deux bipoints $(A;B)$ et $(C;D)$sont ***équipollents*** si et seulement s'ils sont de même direction, de même sens et de même longueur.

On note : $(A;B)\sim(C;D)$ deux bipoints équipollents.

Illustration :



Définition :

L'ensemble des bipoints équipollents au bipoint $(A; B)$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A; B)$, appelée ***vecteur*** et noté $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \{(P; Q) | (P; Q) \sim (A; B)\}$$

Remarques :

- Un bipoint est donc considéré comme un "vecteur lié" qui a une origine et une extrémité.
- On parlera de "vecteur libre" ou plus simplement de vecteur l'ensemble des "vecteurs liés" d'une même classe d'équivalence. La flèche d'un vecteur n'a donc pas de position dans le plan ou dans l'espace. Elle peut être déplacée à condition que ni sa direction, ni son sens, ni sa longueur n'en soient modifiés.
- Un vecteur, se note par une lettre minuscule affublée d'une flèche : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$
- L'espace vectorielle noté V^3 est l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Définition : On appelle ***repère*** de l'espace E^3 tout quadruplet de points $(O; E_1; E_2; E_3)$ dont trois forment un repère dans un plan et dont le troisième n'est pas contenu dans ce plan.

- Si $R = (O; E_1; E_2; E_3)$ est un repère de E^3, on peut construire trois vecteurs :

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1},\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2} \text{ et } \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OE_3}$$

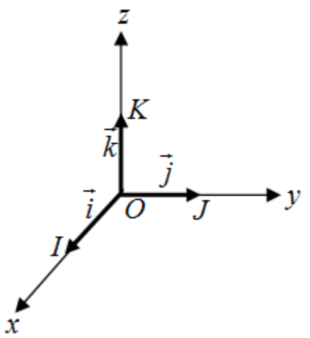
  qui déterminent une base de E^3.

- $B(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la base associée au repère R de l'espace vectorielle V^3.

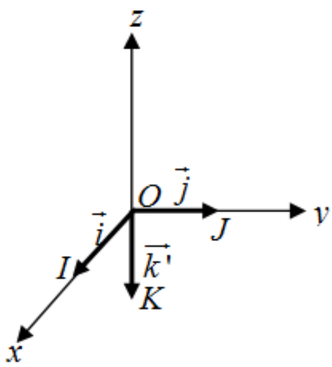
Définition : Un ***repère orthonormé*** de $\mathbb{R}^3$ est un repère (O, I, J, K) ou $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ si
1) $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et 2) $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}, \vec{\imath} \perp \vec{k}, \vec{\jmath} \perp \vec{k}$

Remarques :

- L'espace $\mathbb{R}^3$ est divisé en 8 quadrants. Nous appellerons "partie visible" le 1er quadrant, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont toutes positives $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
- Par convention, on prend une base directe ou orienté positivement.

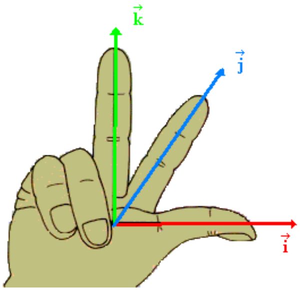


La base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une ***base directe*** ou ***orienté positivement***.



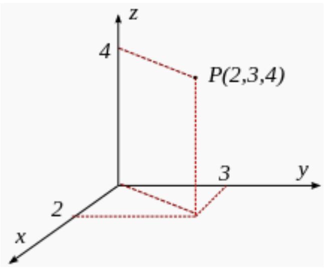
La base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}')$ est une ***base rétrograde*** ou ***orienté négativement***.

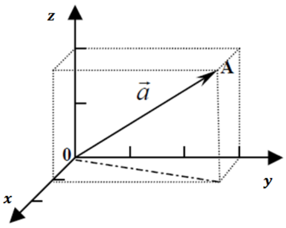
On associe les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}. \vec{k}$ aux axes Ox, Oy, Oz formé par les trois doigts de la main droite :

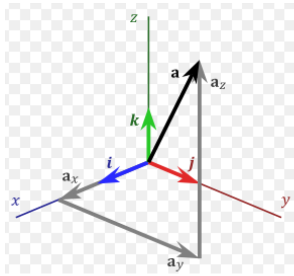


Définition : Soit (O, I, J, K) ou $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$. Les ***coordonnées*** x, y et z d'un point P de $\mathbb{R}^3$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$.On note $P(x, y, z)$ où x est l'***abscisse***, y est l'***ordonnée*** et z est la ***cote***.

Illustration :







Un vecteur se notera ainsi $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ relativement à la base.

Définition : Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ est appelé le ***plan horizontal*** noté $\boldsymbol{xOy}$. Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\jmath}$ et k est appelé le ***plan frontal*** noté $\boldsymbol{yOz}$. Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{k}$ est appelé le ***plan de profil*** noté $\boldsymbol{xOz}$.

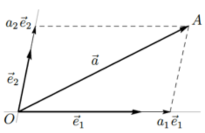
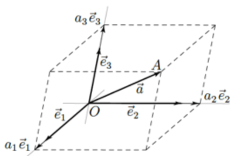
Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Base orthonormée

On note $\|\vec{a}\|$ la norme d'un vecteur $\vec{a}$. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux, on note $\vec{a} \perp \vec{b}$

Dans le plan	**Dans l'espace**
$(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est une *base orthonormée* si	$(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une *base orthonormée* si
$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$	$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

Composantes d'un vecteur relativement à une base

Dans le plan	Dans l'espace
	
Une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$ est un couple de vecteurs linéairement indépendants	Une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$ est un triplet de vecteurs linéairement indépendants
$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Remarques :

Dans la suite du cours, les coordonnées des points seront données relativement à un repère orthonormé $R = (O, I, J, K)$ de $\mathbb{R}^3$ et les composantes des vecteurs seront relatives à la base $B\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ associée.

Calculs avec les coordonnées

Prenons l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$

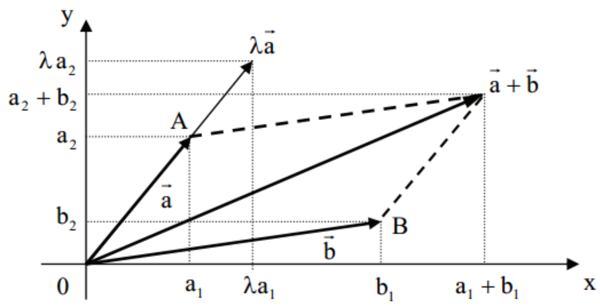
Soient trois points $A(a_1; a_2; a_3); B(b_1; b_2; b_3)$ et $C(c_1; c_2; c_3)$

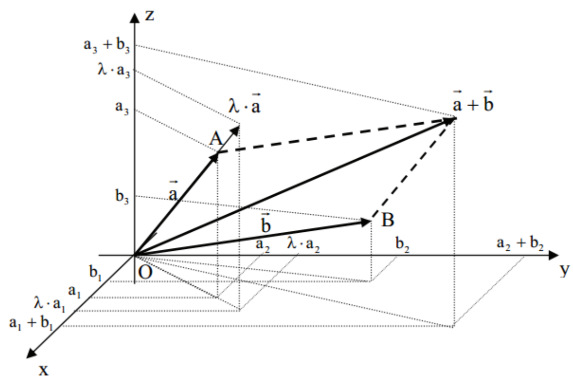
On a : Un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Multiplication avec un scalaire : $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}, \lambda \epsilon \mathbb{R}$

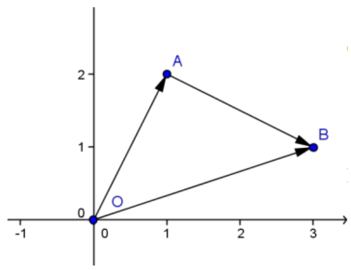
Addition de deux vecteurs : $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$

Illustration dans le plan et l'espace :





La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$



Exemple : On donne les points $A(-2; 10; 5)$ *et* $B(8; 4; -10)$

Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le **milieu** M d'un segment $[AB]$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{a_1 + b_1}{2};\frac{a_2 + b_2}{2};\frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Exemple : On donne les points $A(-2; 10; 5)$ *et* $B(8; 4; -10)$

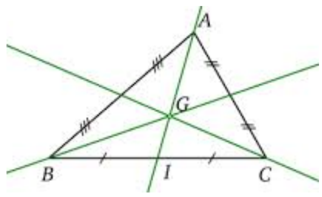
Calculer les coordonnées M *du point milieu du segment* $[AB]$

Le **centre de gravité** G d'un triangle ABC :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \Leftrightarrow G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3};\frac{a_2 + b_2 + c_2}{3};\frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}\right)$$

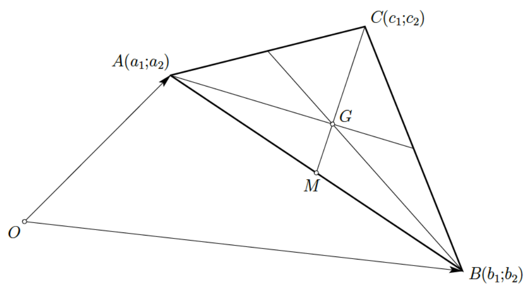
Exemple : On donne les points $A(-1; 8; 2), B(4; 5; -1)$ *et* $C(2; 7; 1)$

Calculer les coordonnées du centre de gravité G *du triangle* ABC



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Vecteur défini par deux points	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$
Longueur d'un segment	$AB = \lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
Milieu d'un segment	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ $\Leftrightarrow M\left(\frac{a_1 + b_1}{2};\frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
Centre de gravité d'un triangle	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ $\Leftrightarrow G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3};\frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$



Notions et vocabulaires de la géométrie vectorielle

Soit un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

La ***norme*** de $\vec{a}$, notée $\|\vec{a}\|$, est la longueur du vecteur $\vec{a}$.

On a : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Propriétés de la norme :

Si $\vec{a}$ est un vecteur du plan ou de l'espace et k est un nombre réel, alors :

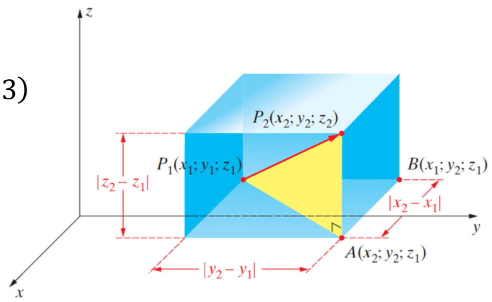
1) $\|\vec{a}\| \geq 0$ 2) $\|\vec{a}\| = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ 3) $\|k \cdot \vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{a}\|$

Définition : Soient deux points $P_1(x_1; y_1; z_1)$ et $P_2(x_2; y_2; z_2)$,

la **norme** du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ correspond à la distance entre le point P_1 et le point P_2.

Il s'agit d'une double application du théorème de Pythagore :

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{\left\|\overrightarrow{P_1A}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AP_2}\right\|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Exemple : Déterminer la distance du point $A(3; 2; 1)$au point $B(4; 6; 3)$

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21} \cong 4{,}58$$

Exercice : Calculer la distance entre $C(-1; -3; 1)$ et $D(3; 4; -2)$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Norme d'un vecteur

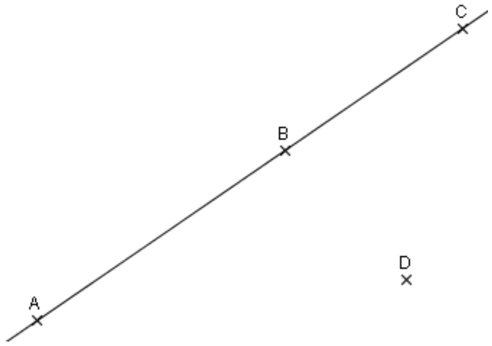
$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

$\|\lambda\vec{a}\| = \lvert\lambda\rvert\,\|\vec{a}\|$	$\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|$
$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2)$

Définition : On dit que trois points A, B et C sont ***alignés*** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ***colinéaires*** : $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, où $\lambda \epsilon \mathbb{R}$

Illustration :



Exemple : *Est-ce que les points $A(3;2;1); B(-1;-2;1)$ et $C(5;3;7)$ sont alignés ?*

$$\text{Non, car } \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \; car: \begin{cases} \gamma = -2 \\ \gamma = -4 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Exercice : *Est-ce que les points $A(2;4;2), B(1;-2;5)$ et $C(9;-2;-4)$ sont alignés ?*

Définition : On appelle ***combinaison linéaire*** des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de coefficients respectifs α, β, γ le vecteur $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

Exemple : On donne les vecteurs $\vec{a} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{c} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$

Réduire en combinaison linéaire de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ le vecteur $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

Définition : On dit que quatre points distincts A, B, C et D sont ***coplanaires*** et si seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont ***coplanaires*** :

$$\text{Il existe } (\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0) \text{ tels que } \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

Signifie géométriquement que les vecteurs sont coplanaires si et seulement s'ils sont parallèles à un même plan. Donc ramenés à une origine commune, des vecteurs coplanaires sont dans un même plan.

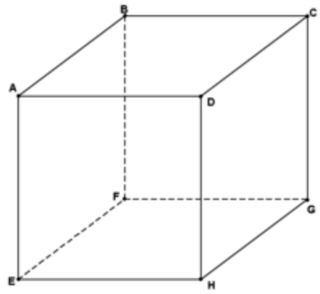


Illustration : Dans ce cube, les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$ sont coplanaires

Conséquence de la définition :
A, B, C et Dsont **coplanaires** si et seulement s'il existe δ et ε tels que $\delta\overrightarrow{AB} + \varepsilon\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

C'est-à-dire que trois vecteurs sont coplanaires si l'un d'eux au moins est une combinaison linéaire des deux autres.

En effet :

$$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = -\gamma\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{-\gamma}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\beta}{-\gamma}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{\alpha}{-\gamma}\right)}_{\delta}\overrightarrow{AB} + \underbrace{\left(\frac{\beta}{-\gamma}\right)}_{\varepsilon}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

Définition : Des vecteurs sont ***linéairement dépendants*** si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, ils sont dits ***linéairement indépendants***.

Trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont ***linéairement indépendants*** si et seulement si

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Exemples : Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont-ils linéairement indépendants ou linéairement dépendants ?

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *Ils sont linéairement dépendants car :* $3\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c}$

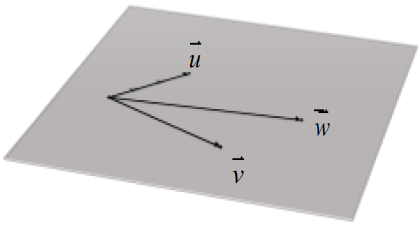
2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *Ils sont linéairement indépendants car :*

$$\delta\vec{a} + \varepsilon\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = 2 - \delta \\ \delta = 1 \\ \delta = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

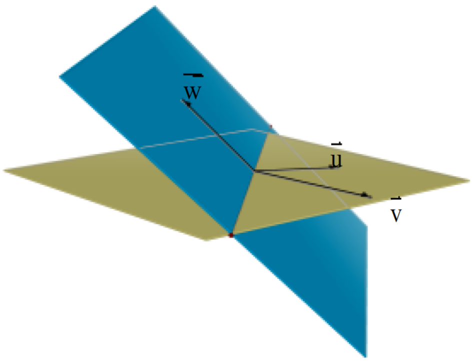
Remarques :

- Deux vecteurs sont dits colinéaires si et seulement s'ils sont linéairement dépendants
- Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'ils sont linéairement dépendants.
- Le vecteur nul et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires
- Trois vecteurs sont coplanaires s'ils sont dans un même plan.

Illustration :



$\vec{w}$ Appartient au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



$\vec{w}$ N'appartient pas au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{w}$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

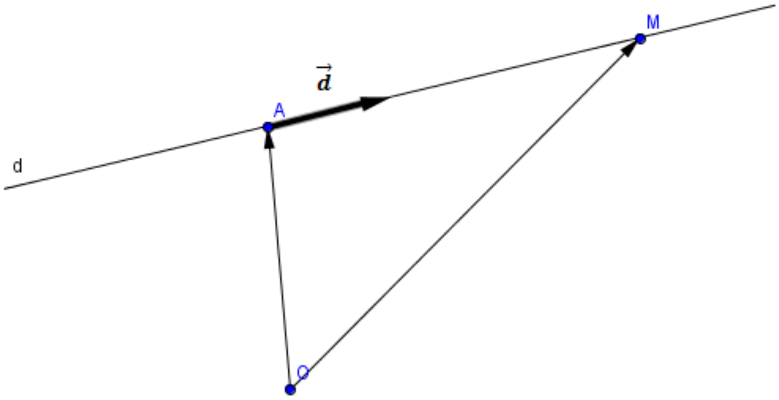
Exercice : Soient les points $A(-1; 2; -3), B(2; -2; 1), C(3; 5; 4), D(10\,; 4; 15)$
Déterminer si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Réponse : Oui, ils sont coplanaires.

➢ ***Géométrie vectorielle série 1***

1.2 Droites

Soit d la droite passant par le point $A(a_1, a_2 a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

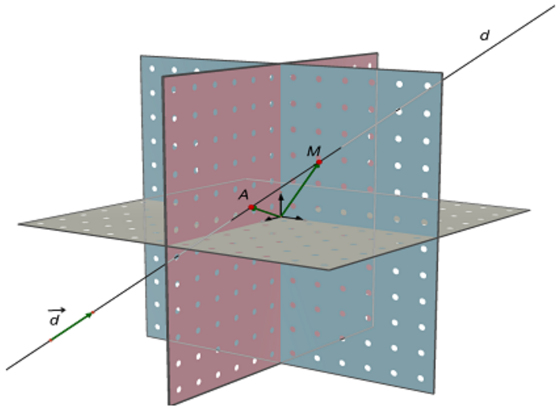


On cherche à établir les conditions que doivent remplir les coordonnées d'un point $M(x; y; z)$ s'il appartient à la droite d. On a donc les vecteurs suivants:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \ et\ \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pour tout point $M(x; y; z)$ de la droite, il existe un nombre $t \in \mathbb{R}$, tel que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}}$$



Que l'on appelle **l'équation vectorielle** ou la **représentation paramétrique** :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}}$$

Cette équation s'écrit aussi sous la forme d'un système d'équations, appelées **équations paramétriques** de d:

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \ \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z = a_3 + td_3 \end{cases}}$$

Si l'on isole t de chacune de ces équations et que l'on égale les expressions obtenues, cela donne le système d'équations, appelées **équations cartésiennes** de d:

$$\boxed{\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}}$$

Remarque :

Dans le cas où l'un des nombres d_1, d_2 et d_3 est nul on ne peut pas écrire les équations cartésiennes de d.

Mais si par exemple, $d_3 = 0$, la troisième équation est alors $z = a_3$ et on écrira :

$$\boxed{\frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2} \ et \ z = a_3}$$

Cela signifie que le vecteur directeur de la droite est $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cette droite est donc parallèle au plan xOy; tous ses points ont la même cote $z = a_3$.

Rappel : Lorsque le vecteur directeur n'est pas donné, il faut au moins donner deux points par lesquels passe la droite. On utilise alors la **relation de Chasles** pour déterminer un vecteur directeur :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Droite

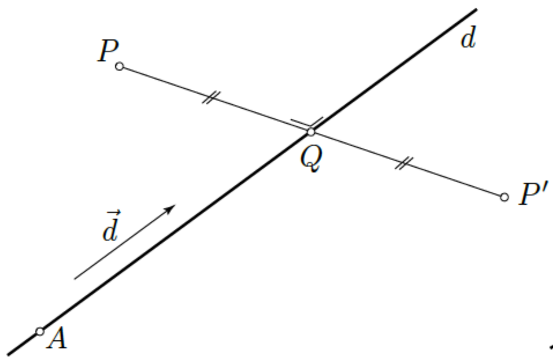
On note d une droite passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Un point $P(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Équations paramétriques $\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Équations cartésiennes $\dfrac{x-a_1}{d_1} = \dfrac{y-a_2}{d_2} = \dfrac{z-a_3}{d_3}$



Exemple : *Soient les points* $A(3;2;1); B(-1;-2;1); C(1;2;4); D(4;6;3); E(5;3;7)$

a) Déterminer la ***représentation paramétrique*** *de la droite* d_1 *passant par les points* A *et* B.

b) Déterminer les ***équations paramétriques*** *de la droite* d_2 *parallèle à* d_1 *et passant par* C.

c) Déterminer ***l'équation cartésienne*** *de la droite* d_3 *passant par les points* C *et* D.

a) $d_1\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \alpha \epsilon \mathbb{R}$ *où* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

b) $d_2\colon \begin{cases} x = 1 - 4\beta \\ y = 2 - 4\beta\ ;\ \beta \epsilon\, \mathbb{R} \\ \quad z = 4 \end{cases}$

c) $d_3\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{-1}$ *avec* $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

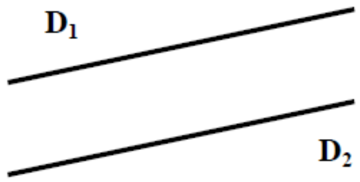
Exercice : *Soit les points* $A(-1;2;-3), B(2;-2;1), C(3;5;4), D(10\ ;4;15)$*,*

Répondre aux mêmes questions que l'exemple ci-dessus

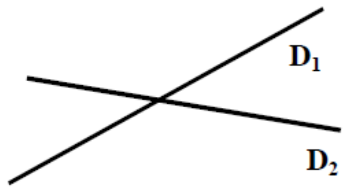
Positions relatives de droites

En trois dimensions, nous allons distinguer 3 positions relatives de deux droites :

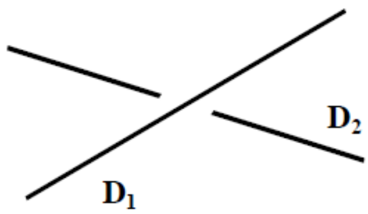
Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et que les droites n'ont pas de point d'intersection.



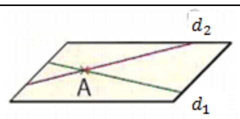
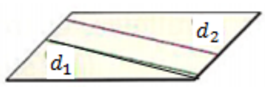
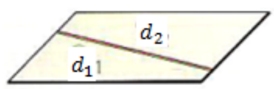
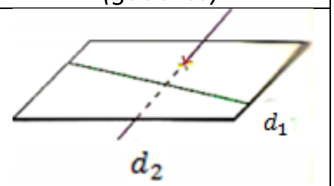
Deux droites sont dites **sécantes** si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires mais qu'elles se croisent en un point.



Deux droites sont dites **gauches** si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et qu'elles n'ont aucun point en commun.



Situation résumée :

Positions relatives des droites d_1 et d_2			
Coplanaires			*Non coplanaires (gauches)*
Sécantes	*Strictement parallèles*	*Confondues*	
 *Un point commun unique*	 *Pas de point commun*	 *Tous les points sont en commun*	 *Il n'existe pas de plan contenant les deux droites*

Exercice : Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les droites d_1: $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 4t \\ z = 5-3t \end{cases}$, $t\epsilon\mathbb{R}$,

d_2: $\begin{cases} x = -6t+8 \\ y = -12t+1 \\ z = 9t-2 \end{cases}$ $t\epsilon\mathbb{R}$ et d_3: $\begin{cases} x = t+6 \\ y = 3t-1 \\ z = -2t+2 \end{cases}$ $t\epsilon\mathbb{R}$ Etudier les positions relatives de ces trois droites

Exercice résolu: Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les droites d_1:$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=4t \\ z=5-3t \end{cases}$, $t\epsilon\mathbb{R}$,

d_2:$\begin{cases} x=-6t+8 \\ y=-12t+1 \\ z=9t-2 \end{cases}$ $t\epsilon\mathbb{R}$ et d_3:$\begin{cases} x=t+6 \\ y=3t-1 \\ z=-2t+2 \end{cases}$ $t\epsilon\mathbb{R}$

Etudier les positions relatives de ces trois droites

- *Position relative de d_1 et d_2:*

  un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{v}=\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$

  on a: $\vec{v}=-3\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Reste à déterminer si les deux droites sont strictement parallèles ou confondues.

  Le point $A(-1;0;5)$ est un point de d_1. Est-ce qu'il fait aussi partie de la droite d_2 ?

  $$A\,\epsilon\, d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1=-6t+8 \\ 0=-12t+1 \\ 5=9t-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3/2 \\ t=1/12 \\ t=7/9 \end{cases}$$

  ce qui est impossible. Donc A n'appartient pas à d_2

  Les droites d_1 et d_2 sont donc <u>strictement parallèles.</u>

- *Position relative de d_1 et d_3:*

  un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_3 est $\vec{w}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

  Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_1 et d_3 ne sont pas parallèles. Elles peuvent être sécantes ou gauches.

  Cherchons un éventuel point d'intersection à d_1 et d_3:

  $$M(x;y;z)\epsilon d_1\cap d_3 \Leftrightarrow \exists s,t\in\mathbb{R}\ tels\ que \begin{cases} x=-1+2t \\ y=4t \\ z=5-3t \end{cases} et \begin{cases} x=s+6 \\ y=3s-1 \\ z=-2s+2 \end{cases}$$

  On a donc: $\begin{cases} -1+2t=s+6 \\ 4t=3s-1 \\ 5-3t=-2s+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2t-7 \\ 4t=3(2t-7)-1 \\ 5-3t=-2(2t-7)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=2t-7 \\ 4t=6t-22 \\ 5-3t=-4t+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=15 \\ t=11 \\ t=11 \end{cases}$

  Les droites d_1 et d_3 sont donc <u>sécantes</u> et leur point d'intersection a comme coordonnées:

  $$\begin{cases} x=-1+2\cdot 11=21 \\ y=4\cdot 11=44 \\ z=5-3\cdot 11=-28 \end{cases}$$

Remarque importante : Lors de la recherche d'un éventuel point d'intersection entre deux droites, il faut absolument donner deux noms différents aux deux paramètres.

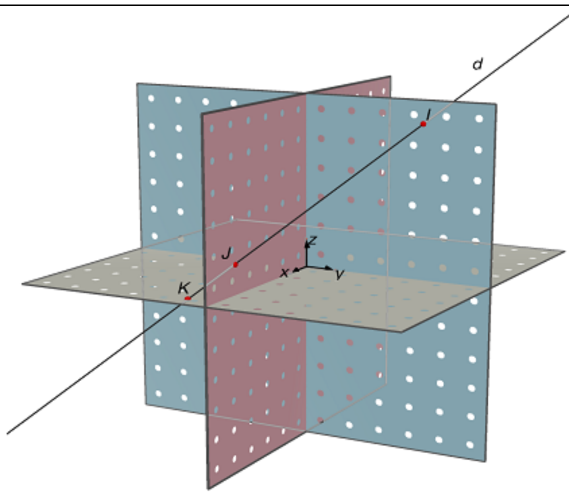
- *Position relative de d_2 et d_3:*

Exercice : Les droites d_1:$\begin{cases} x=13+5k \\ y=-3-2k \\ z=5+3k \end{cases}$ $et\ d_2$:$\begin{cases} x=n \\ y=-2+n \\ z=-1 \end{cases}$ sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ?

Intersections d'une droite avec les plans xOy, xOz, yOz

Définition : On appelle **traces** d'une droite d (sur les plans de coordonnées) les points d'intersection de d avec les plans xOy, xOz et yOz.

Illustration :



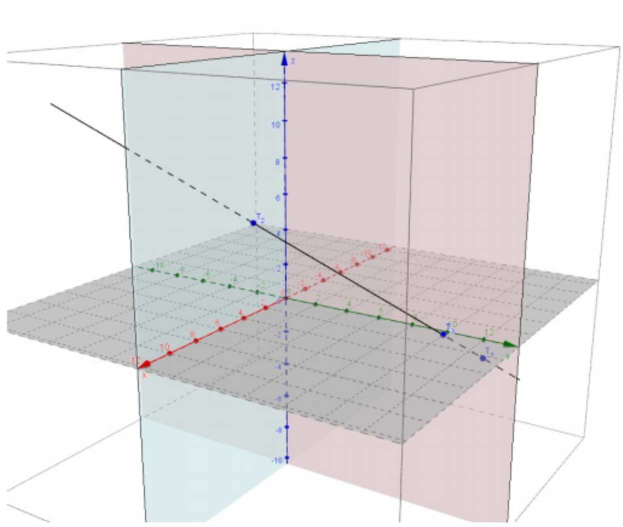
Méthode pour calculer ces intersections :

On peut utiliser les équations paramétriques.

- Intersection avec yOz, point I: poser $x = 0$, calculer t, puis y et z
- Intersection avec xOz, point J: poser $y = 0$, calculer t, puis x et z
- Intersection avec xOy, point K: poser $z = 0$, calculer t, puis x et y

Exemple : Soit $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Calculons les traces de la droite:



- Si $x = 0$, on a: $t = -2$
  donc on obtient: $y = 12$ et $z = -1$
  ce qui donne le point: $T_1(0; 12; -1)$
- Si $y = 0$, on a: $t = 1$
  donc on obtient $x = 3$ et $z = 5$
  ce qui donne le point $T_2(3; 0; 5)$
- Si $z = 0$, on a $t = -1{,}5$
  donc on a $x = 0{,}5$ et $y = 10$
  ce qui donne le point $T_3(0{,}5; 10; 0)$

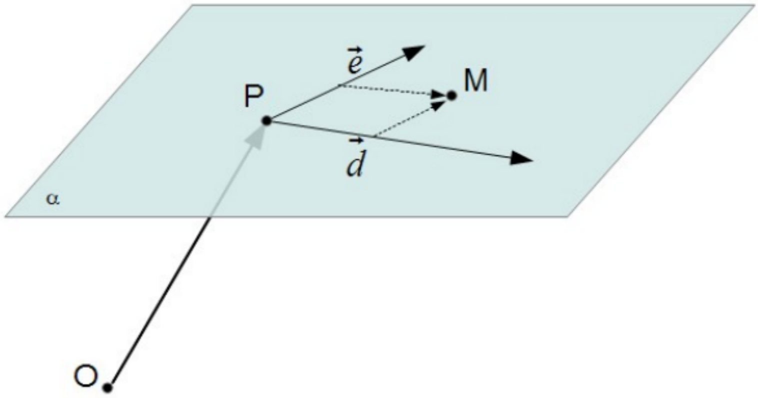
Exercice : Calculer les traces de la droite $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\alpha \epsilon \mathbb{R}$

➢ ***Géométrie vectorielle Série 2***

1.3 Plans

Pour construire un plan π dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il faut connaitre 2 types de données :

- L'orientation du plan π, donnée par deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$, non nuls et non colinéaires.
- La position du plan π, donnée par un vecteur position: $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$



Notons les coordonnées d'un point $M(x; y; z)$ quelconque du plan π. (M pour "mobile"). Et notons $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$

Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est contenu dans le plan π donc il est une combinaison linéaire des deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$: $\overrightarrow{PM} = \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Les vecteurs $\overrightarrow{PM}, \vec{d}$ et $\vec{e}$ sont coplanaires)

A l'aide de la relation de Chasles, on peut écrire : $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$

On peut donc écrire : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ou encore : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ce qui donne **l'équation vectorielle** : $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Lorsque les coefficients λ et μ parcourent l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on obtient tous les points du plan π.

On peut aussi obtenir : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Et on parle d'**équation paramétrique** lorsque l'on écrit sous forme de composantes :

$$\pi : \begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot d_1 + \mu \cdot e_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot d_2 + \mu \cdot e_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot d_3 + \mu \cdot e_3 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque :

La connaissance de trois points non alignés du plan est suffisante. En effet, si un plan contient les points A, B et C, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ peuvent jouer le rôle de vecteurs directeurs, tandis que le vecteur position peut être à choix $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ou $\overrightarrow{OC}$.

Il est possible de faire disparaître les paramètres λ et μ de ce système, pour n'obtenir plus qu'une seule équation en x, y et z. C'est **l'équation cartésienne** du plan π.

Exemple : Soients les points $A(1;2;1), B(-1;1;3)$ et $C(3;-4;-5)$

1) Déterminer une équation vectorielle de ce plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2) Déterminer l'équation cartésienne de ce plan :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - 6\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 6\mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Idée : isoler un paramètre dans deux équations pour les égaliser (et faire disparaitre ce paramètre)

$$\begin{cases} \frac{x-1+2\lambda}{2} = \mu \\ \frac{y-2+\lambda}{-6} = \mu \\ z = 1 + 2\lambda - 6 \cdot \mu \end{cases}$$

On obtient : $\frac{x-1+2\lambda}{2} = \frac{y-2+\lambda}{-6}$

Donc : $-6(x-1+2\lambda) = 2(y-2+\lambda) \Leftrightarrow -3(x-1+2\lambda) = y-2+\lambda \Leftrightarrow -3x+3-y+2 = 7\lambda$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-3x-y+5}{7}$

On peut alors injecter cette dernière expression dans la dernière équation :

$$z = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} - 6 \cdot \frac{y-2+\lambda}{-6} = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} + y - 2 + \lambda = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} + y - 2 + \frac{-3x-y+5}{7}$$

Donc : $z = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} + y - 2 + \frac{-3x-y+5}{7} = -1 + \frac{-6x-2y+10-3x-y+5}{7} + y$
Donc: $z - y + 1 = \frac{-9x-3y+15}{7} \Leftrightarrow 7z - 7y + 7 = -9x - 3y + 15 \Leftrightarrow \mathbf{9x - 4y + 7z = 8}$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

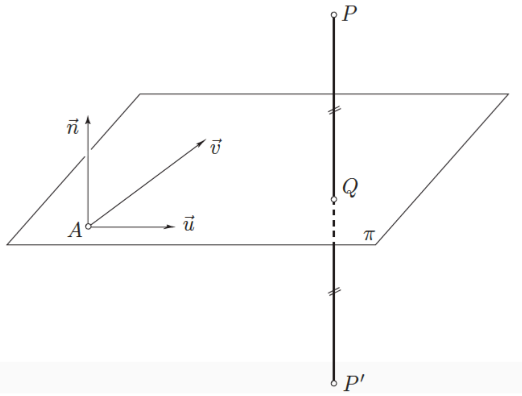
Plan

On note π un plan passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un *vecteur normal* au plan π.

Un point $P(x; y; z)$ appartient au plan π si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Équation cartésienne	$a x + b y + c z + d = 0$	
Autres formes	$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$	$\perp$
	$\text{Det}(\overrightarrow{AP}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$	



Représentation graphique précise d'un plan :

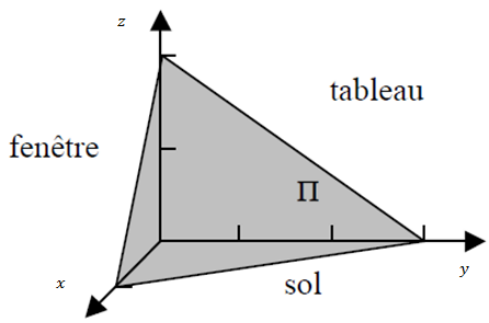
Soit le plan π: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ou encore, mis sous forme cartésienne: $6x + 2y + 3z = 6$

Calculons les points d'intersection du plan π avec chacun des trois axes du repère :

- Sur l'axe x: on a $y = 0$ et $z = 0$: 6x=6 donc $x = 1$ donc: $(1; 0; 0)$
- Sur l'axe y: on a $x = 0$ et $z = 0$: $2y = 6$ donc $y = 3$ donc $(0; 3; 0)$
- Sur l'axe z: on a $x = 0$ et $y = 0$: $3z = 6$ donc $z = 2$ donc $(0; 0; 2)$

On peut ensuite représenter le plan à l'aide de ses traces :



Positions relatives d'une droite et d'un plan

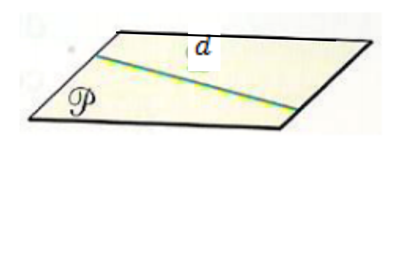
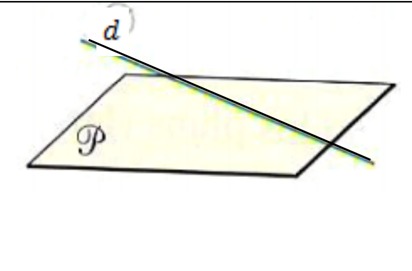
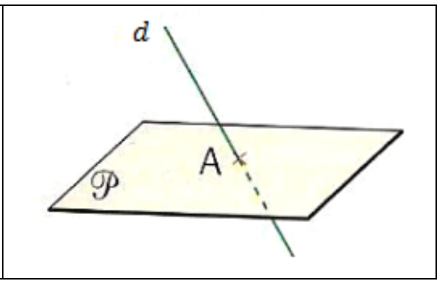
On considère la droite $d = (A; \vec{d})$ et le plan $P = (B; \vec{u}; \vec{v})$ dans l'espace

Définition :

Si les vecteurs $\vec{d}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, la droite d et le plan P sont ***parallèles*** ; sinon, ils sont ***sécants***.

Résumé des situations possibles :

Positions relatives d'une droite d et d'un plan P		
Parallèles		**Sécants**
d est incluse dans le plan P	d et P n'ont aucun point en commun	d et P ont un seul point en commun

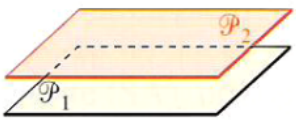
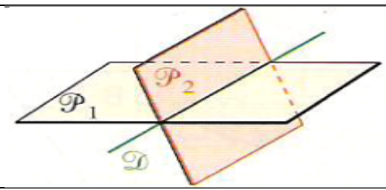
		

Positions relatives de deux plans de l'espace :

Soit les plans $\alpha_1 = (A_1; \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{v_1})$ et $\alpha_2 = (A_2; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{v_2})$ de l'espace

Définition : Si chacun des triplets $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{u_2})$ et $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})$ est un triplet de vecteurs linéairement dépendant, les plans α_1 et α_2 sont ***parallèles*** ; sinon ils sont ***sécants***.

Il y a trois cas possibles résumés dans ce tableau :

Positions relatives de deux plans		
Parallèles		**Sécants**
Strictement parallèles ou disjoints	**Confondus**	
Leur intersection est vide	Leur intersection est un plan	Leur intersection est la droite d
		

Exercice de récapitulation :

Considérons les droites d et e données par un système d'équations paramétriques et trois plans α, β et γ par leurs équations cartésiennes :

$$d: \begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = -3 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases}; \quad e: \begin{cases} x = n \\ y = -2 + n \\ z = -1 \end{cases};$$

$$\alpha: 5x + 11y - z - 11 = 0; \quad \beta: x - y + 3z + 1 = 0; \quad \gamma: 5x + 11y - z - 43 = 0$$

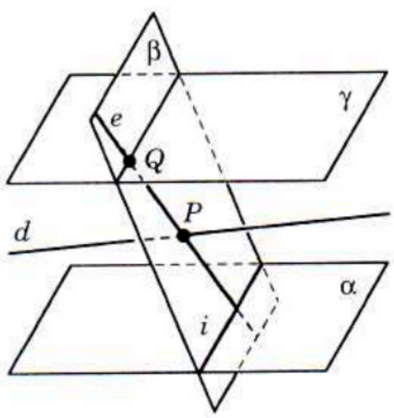
a) Montrons que les droites d et e sont sécantes en un point P dont on déterminera les coordonnées

b) Montrons que les plans α et β sont sécants et déterminons un système d'équations paramétriques de leur droite i d'intersection.

c) Montrons que les plans α et γ sont strictement parallèles.

d) Montrons que la droite e coupe le plan γ en un point Q dont on déterminera les coordonnées

e) Montrons que la droite d est strictement parallèle au plan α



f) Montrons que la droite e est incluse dans le plan β.

Situation :

➢ ***Géométrie vectorielle Série 3***

Solution de l'exercice de récapitulation :

a) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 13+5k=n \\ -3-2k=-2+n \\ 5+3k=-1 \end{cases}$

On résout : $\begin{cases} 5+3k=-1 \\ -3-2k=-2+n \end{cases}$

On trouve : $\begin{cases} k=-2 \\ n=3 \end{cases}$ que l'on vérifie dans la première équation : $13+5(-2)=3$

Cette égalité étant vérifiée, le système complet envisagé admet pour solutions $k=-2$ et $n=3$ et les deux droites d et e sont sécantes et admettent pour d'intersection le point $P(3;1;-1)$

Remarque : Si la première équation n'était pas vérifiée par la solution des deuxièmes et troisièmes équations, les deux droites d et e seraient gauches.

b) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 5x+11y-z-11=0 \\ x-y+3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} z=5x+11y-11 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$

Posons $y=\lambda$. On a alors : $x=-2\lambda+2$ et $z=\lambda-1$
On obtient alors que le système admet une infinité de solutions et l'on peut donner par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$
Il s'agit d'un système d'équations paramétriques d'une droite, qui est donc la droite i d'intersection des plans α et β.

c) Il faut étudier le système : $\begin{cases} 5x+11y-z-11=0 \\ 5x+11y-z-43=0 \end{cases}$

Ce système se transforme en : $\begin{cases} 32=0 \\ 5x+11y-z-43=0 \end{cases}$ qui n'admet aucune solution. Les deux plans sont donc strictement parallèles.

d) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 5x+11y-z-43=0 \\ x=n \\ y=-2+n \\ z=-1 \end{cases}$

Par substitution, on obtient l'équation : $5n+11(-2+n)-(-1)-43=0$

Celle-ci admet la solution unique $n = 4$. Ainsi la droite e et le plan γ admettent un seul point commun : $Q(4; 2; -1)$

e) Même démarche que à la question d),
on obtient l'équation : $5(13 + 5k) + 11(-3 - 2k) - (5 + 3k) - 11 = 0 \Leftrightarrow 16 = 0$

Le système n'admettant pas de solution, la droite d et le plan α n'ont aucun point commun et sont par conséquent strictement parallèles.

f) Même démarche qu'en d), on obtient l'équation : $n - (-2 + n) + 3(-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$
Ainsi, les coordonnées de tout point de la droite e vérifient l'équation du plan β, et par conséquent e est incluse dans β.

2. Produits

2.1 Produit scalaire

Nous allons maintenant définir un produit entre deux vecteurs. Le produit scalaire est une notion importante en géométrie vectorielle puisqu'il pourra nous aider à déterminer si des vecteurs sont orthogonaux ou de manière plus générale : déterminer l'angle entre deux vecteurs.

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$.

On définit le **produit scalaire** de ces deux vecteurs par : $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$

Remarque : $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \|\vec{a}\|^2$

Exercice :

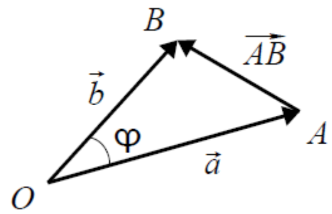
1) Calculer le produit scalaire de $\vec{a} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 9\vec{k}$ *et* $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$
2) Calculer $\|\vec{a}\|^2$

Théorème : $\boldsymbol{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$

Signifie : Deux vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.*

Démonstration :

Théorème : Soient deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$.
Notons φ l'angle entre ces deux vecteurs.
On a : $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)}$



Démonstration :

Déterminons l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à l'aide du théorème du cosinus ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\varphi)$)

On obtient : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos(\varphi)$

Isolons le cosinus : $\cos(\varphi) = \frac{\|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$

Développons à l'aide de la définition de la norme et des coordonnées :

$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\left\|\overrightarrow{OB}\right\|^2 = \left\|\vec{b}\right\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right\|^2 = \left\|\vec{b} - \vec{a}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

On obtient donc le développement suivant pour le cosinus :

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2\ )}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$$

Développons le numérateur :

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2\ )}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$$

Après simplifications, on obtient :

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|} = \frac{\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b}}}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Produit scalaire de deux vecteurs

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Propriétés :

1) Le résultat de ce produit est un scalaire, c'est-à-dire un nombre réel. D'où son nom !

2) Le produit scalaire est commutatif : $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}$

car: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3=b_1\cdot a_1+b_2\cdot a_2+b_3\cdot a_3=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

3) $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\cos(\varphi)=0\Leftrightarrow\varphi=90°}$

Autrement dit : si $\vec{a}\neq\vec{0}$ et $\vec{b}\neq\vec{0}$ alors les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

4) $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}<0\Leftrightarrow\cos(\varphi)<0\Leftrightarrow\varphi>90°}$

5) Le produit scalaire se comporte comme une opération distributive : $\boxed{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}}$
Remarque : dans la partie gauche, l'addition est vectorielle alors que dans la partie de droite, elle est entre deux nombres.

6) Les parenthèses peuvent être déplacées : $\boxed{(\lambda\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})}$

7) La norme d'un vecteur se calcule facilement à l'aide du produit scalaire :

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

Résumé :

Le produit scalaire de deux vecteurs s'obtient en effectuant la somme des produits "composante par composante" de chacun des deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}$$

Le produit scalaire permet de calculer l'angle φ entre deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}}$$

Il possède des propriétés attendues.

Exercice : 1) On donne : $A(3;1;0)$ et $B(5;2;1)$
A l'aide du produit scalaire, calculer l'angle φ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:
2) Montrer à l'aide du produit scalaire que les deux vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

Lien avec les droites :

Deux droites vectorielles de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont ***orthogonales*** si les vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si le produit scalaire $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}$ est nul.

Définition : Les deux droites sont dites ***perpendiculaires*** si elles sont orthogonales <u>et</u> sécantes.

Marche à suivre pour trouver l'angle entre deux droites :

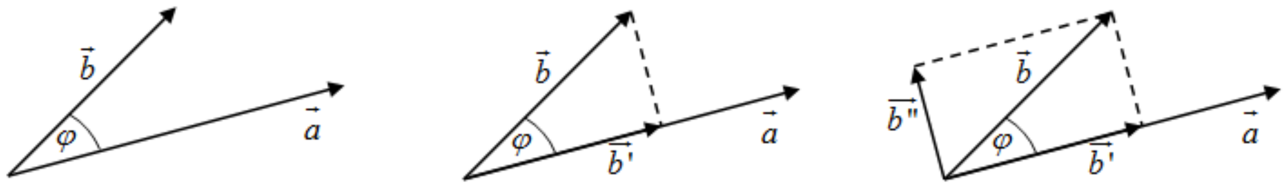
(1) Vérifier que les droites sont sécantes
(2) A partir des équations données, déterminer, pour chaque droite un vecteur directeur.
(3) Trouver l'angle θ avec la formule du produit scalaire : $\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}}{\|\overrightarrow{d_1}\| \cdot \|\overrightarrow{d_2}\|}$
(4) Trouver l'angle α entre ces droites :
- $\alpha = \theta$, si $0° \leq \theta \leq 90°$
- $\alpha = 180° - \theta$, si $90° < \theta < 180°$

Exercice : *Déterminer l'angle aigu entre les droites :* $d_1 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ *et* $d_2 : \begin{cases} x = 1 - v \\ y = 3 + 2v \\ z = -4 - 3v \end{cases}$ *avec* $t, v \in \mathbb{R}$

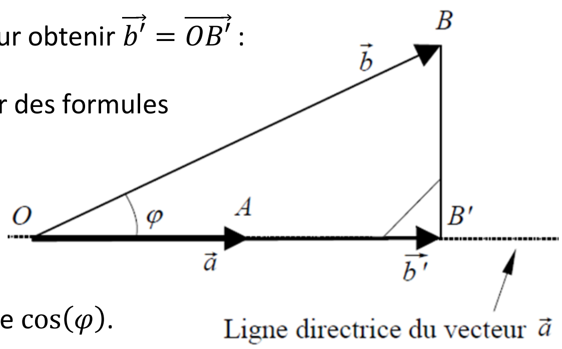
➢ ***Géométrie vectorielle Série 4 exercice 3***

Interprétation géométrique :

Illustration de la projection orthogonale d'un vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$:



Définition et formule :



Projetons orthogonalement $\vec{b}$ sur la ligne directrice du vecteur $\vec{a}$, pour obtenir $\vec{b'} = \overrightarrow{OB'}$:

Nous obtenons un triangle rectangle et nous pouvons donc appliquer des formules de trigonométrie :

$\cos(\varphi) = \frac{\|\vec{b'}\|}{\|\vec{b}\|}$ (si $\varphi \leq 90°$) et $\cos(\varphi) = -\frac{\|\vec{b'}\|}{\|\vec{b}\|}$ (si $\varphi > 90°$)

Donc : $\left\|\vec{b'}\right\| = \pm\|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$ où le signe $\pm$ est le même que celui de $\cos(\varphi)$.

On peut donc substituer cette dernière expression dans la définition du produit scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \cdot \boldsymbol{\cos(\varphi)} = \pm \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{\boldsymbol{b}'}\right\|$$

Illustration avec le vecteur $\vec{a}$ plus court que la projection du vecteur $\vec{b}$

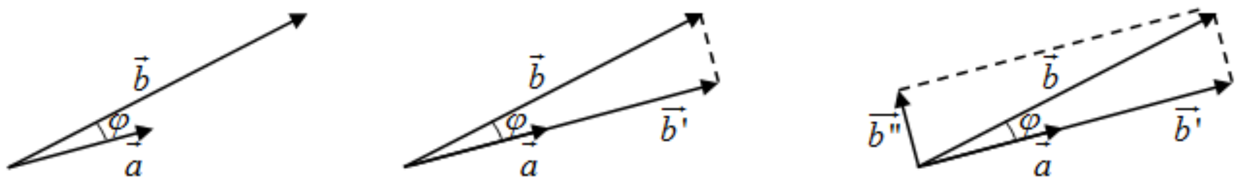
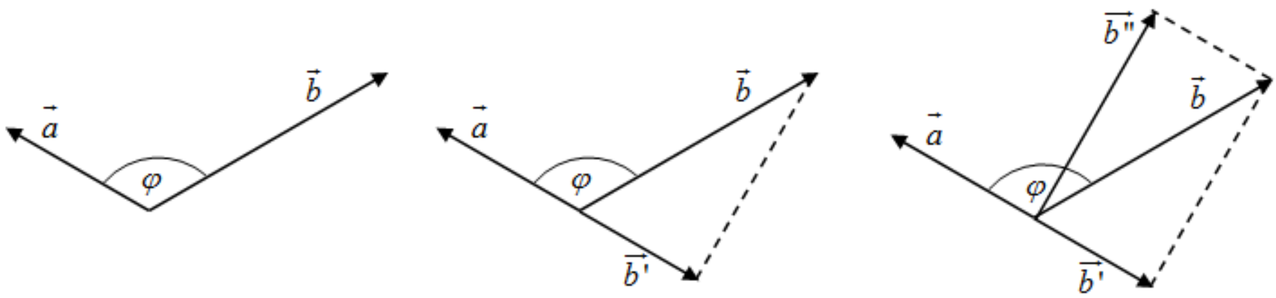
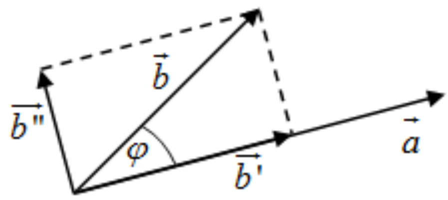


Illustration avec un angle obtu:



Remarque : Le vecteur $\vec{b''}$ est le vecteur orthogonal à $\vec{a}$ tel que $\vec{b'} + \vec{b''} = \vec{b}$.
En physique, il est fréquent de décomposer un vecteur parallèlement et perpendiculairement à une direction.

Théorèmes : (expressions de la projection orthogonale):



$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b'}}$

Démonstration :

Si φ est aigu :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi)=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}'\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}'\|\cdot\cos(0)=\vec{a}\cdot\vec{b}'$$

Si φ est obtus :

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\varphi)=-\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\underbrace{\cos(180-\varphi)}_{>0}=-\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}'\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}'\|\cdot\underbrace{\cos(180)}_{-1}=\vec{a}\cdot\vec{b}'$$

$\boxed{\vec{b'} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}}$

Démonstration :

$\vec{b}=\vec{b}'+\vec{b}" \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}+\vec{b}"$ car $\vec{b}'$ et $\vec{a}$ sont colinéaires

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{a}+\vec{b}"\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{a}\right)+\vec{a}\cdot\vec{b}" \underbrace{=}_{\substack{\vec{a}\ et\ \vec{b}"\ sont\ orthogonaux\\ \vec{a}\cdot\vec{b}"=0}} \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=\lambda\|\vec{a}\|^2 \quad \Leftrightarrow \lambda=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}$$

Donc $\vec{b}'=\lambda\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$

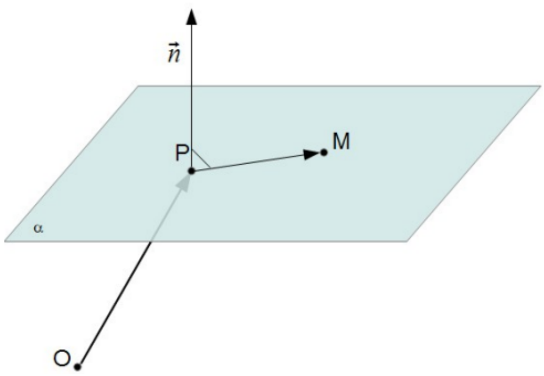
$\boxed{\|\vec{b'}\| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|}}$

Démonstration :

$$\|\vec{b}'\|=\left\|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\right\|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\right|\|\vec{a}\|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|^2}\|\vec{a}\|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$$

➢ ***Géométrie vectorielle Série 4***

Définition d'un plan avec un vecteur normal :



On se donne un point $P(p_1; p_2; p_3)$.
Le plan "passe par ce point" : $P \in \alpha$.

On se donne aussi un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal au plan α. On dit que ce vecteur est un ***vecteur normal*** au plan.

Voici une représentation de la situation :

On cherche à établir les conditions que doivent remplir les coordonnées d'un point $M(x; y; z)$ s'il appartient au plan α.

On a donc les vecteurs suivants : $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On peut donc poser l'équation vectorielle suivante : $\overrightarrow{OM} \perp \vec{n}$ et donc $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0$
Ce qui donne en composantes :

$$\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \\ z - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x - p_1)a + (y - p_2)b + (z - p_3)c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax - ap_1 + by - bp_2 + cz - cp_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz = \underbrace{ap_1 + bp_2 + cp_3}_{=d}$$

On constate que $d = ap_1 + bp_2 + cp_3 = \vec{n} \cdot \vec{p}$, on obtient donc une équation cartésienne de la forme :

$\boldsymbol{ax + by + cz = d}$, où a, b et c sont les composantes du vecteur normal $\vec{n}$ et d est le produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{p}$

Exemple :

Donner la forme cartésienne de plan β contenant le point $P(2; 1; 5)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On obtient donc $\beta :\ x + 2y - z = d$.

Pour trouver la valeur de d, on a deux méthodes :

- Calculer : $\vec{n} \cdot p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -1$.
  donc $\beta :\ x + 2y - z = -1$
- Utiliser le fait que P est un point du plan. Les coordonnées du point P doivent donc satisfaire l'équation du plan : $2 + 2 - 5 + d = 0$ et donc $d = -1$

Pour passer d'une définition à l'autre, il peut être utile de calculer un vecteur normal à partir des deux vecteurs directeurs. Cela nous amène à la définition du produit vectoriel de deux vecteurs.

➢ ***Géométrie vectorielle Série 5 exercices 1 à 6***

2.2 Produit vectoriel

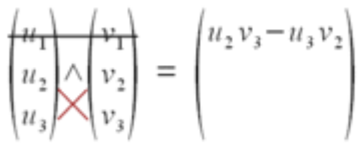
Définition : si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

on définit le ***produit vectoriel*** comme le vecteur dont les composantes sont: $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2 b_3 - a_3 b_2} \\ \boldsymbol{a_3 b_1 - a_1 b_3} \\ \boldsymbol{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{pmatrix}$

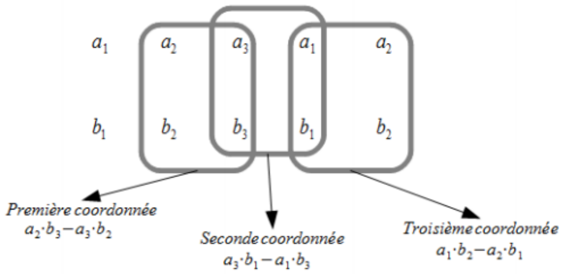
Notation : Dans certains livres, on peut trouver une autre notation: $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Trucs pour calculer le produit vectoriel :

1) Cacher la ligne correspondant à celle que l'on veut obtenir et multiplier en croix ce qui reste:

illustration: 

2) On calcule selon la trame suivante :



Introduction de la notation de déterminant dans le calcul de $\vec{a} \times \vec{b}$:

1. On peut écrire : $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

2. Pour le calcul de $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$, on utilise souvent (et par abus de notation) le pseudo-déterminant en utilisant la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vec{i} \\ a_2 & b_2 & \vec{j} \\ a_3 & b_3 & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_1 & b_1 & \vec{i} & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{j} & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{k} & a_3 & b_3 \end{matrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

Exercice : On donne les vecteurs $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ et $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

Calculer les produits vectoriels suivants : $\vec{a} \times \vec{b}$ et $\vec{b} \times \vec{a}$

Propriété 1: Lorsque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

Preuve :

Propriété 2: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

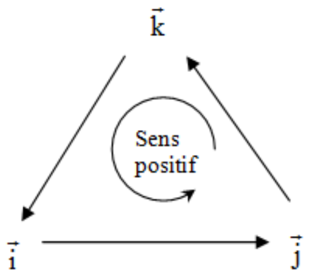
Preuve: Montrons que $(\overrightarrow{a \times b}) \cdot \vec{a} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$
$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

Propriété 3: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

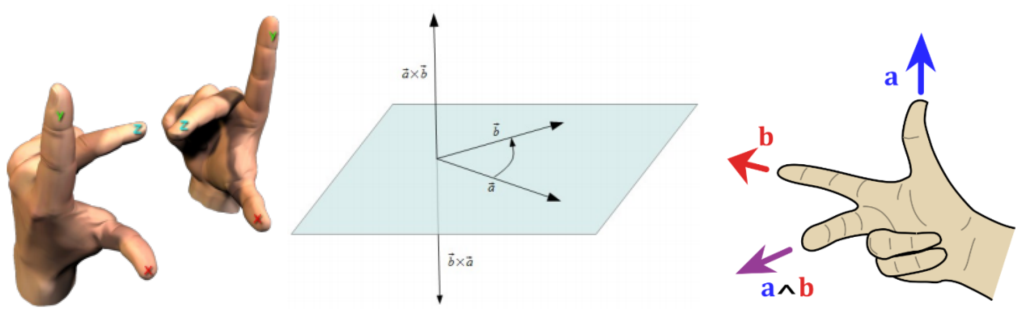
Même démonstration que la propriété 2.

$\times \nearrow$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$



Le sens du produit vectoriel s'obtient par

a) la règle de la main droite: les trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{a} \times \vec{b}$ doivent former une base directe, comme les trois doigts de la main droite.



b) la règle du tire bouchon: en faisant tourner $\vec{a}$ vers $\vec{b}$, on définit le sens de rotation du tir bouchon.

Exercice : Soit $A(1;2;1), B(2;3;-1)$ *et* $C(1;1;4)$.

a) Déterminer l'équation vectorielle du plan α *passant par les trois points :*

b) Déterminer les équations paramétriques de ce plan :

c) Déterminer l'équation cartésienne :

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$

$d = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} =$

Donc :

α:

- ***Géométrie vectorielle Série 5 exercices 7 à 19***

Interprétation géométrique du produit vectoriel

Propriété 4: $\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\| = \|\vec{\boldsymbol{a}}\| \cdot \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \,\mathbf{sin}\, (\boldsymbol{\varphi})$

Preuve :

$$\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\|^{2} = \left\|\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}\right\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= a_2^2b_3^2 - 2a_ab_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_3b_1a_ab_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2$$

$$= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_ab_3a_3b_2 - 2a_3b_1a_ab_3 - 2a_1b_2a_2b_1$$

$$= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + \boldsymbol{a_1^2b_1^2} + \boldsymbol{a_2^2b_2^2} + \boldsymbol{a_3^2b_3^2} - \boldsymbol{a_1^2b_1^2} - \boldsymbol{a_2^2b_2^2} - \boldsymbol{a_3^2b_3^2}$$

$$- 2a_ab_3a_3b_2 - 2a_3b_1a_ab_3 - 2a_1b_2a_2b_1$$

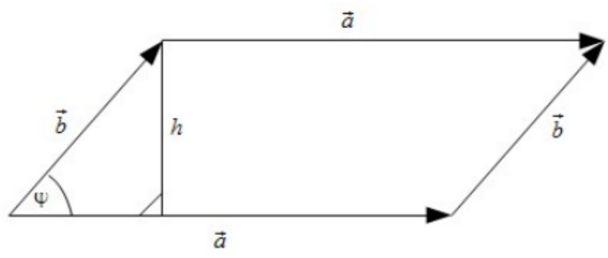
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \underbrace{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}_{\left(\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos(\varphi)\right)^2}$$

donc: $\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\|^{\mathbf{2}} = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \left(\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos(\varphi)\right)^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2(\varphi)) = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2(\phi)$

Finalement: $\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\| = \|\vec{\boldsymbol{a}}\| \cdot \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \,\mathbf{sin}\, (\boldsymbol{\varphi})$

Géométriquement on peut donc interpréter $\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\|$ **comme l'aire du parallélogramme** engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



En effet: $\sin(\varphi) = \frac{h}{\|\vec{b}\|} \Rightarrow h = \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi)$

Donc: $Aire = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin(\varphi)$

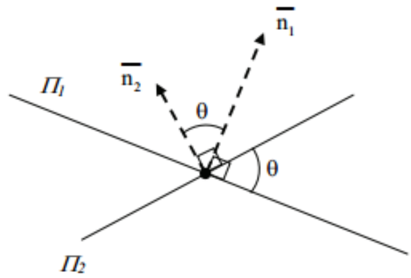
Exercice: On donne les vecteurs $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ *et* $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$.

➢ ***Géométrie vectorielle Série 5 exercice 20***

Angle entre deux plans :

Définition : L'angle entre deux plans est l'angle aigu entre leurs deux vecteurs normaux respectifs.

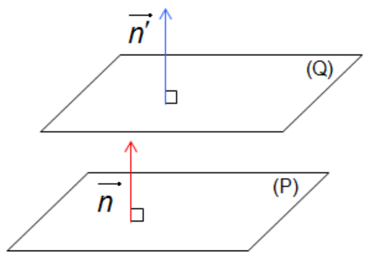


On a donc la formule suivante :

$$\boxed{\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}\right)}$$

ou

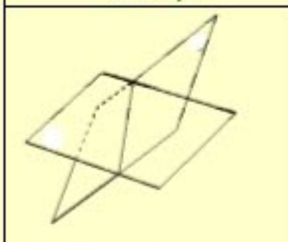
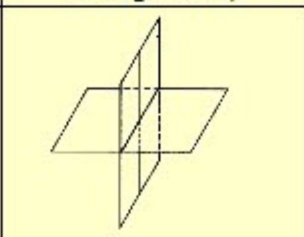
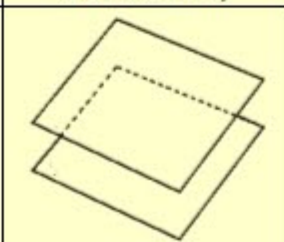
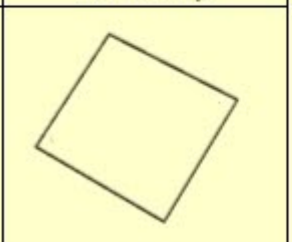
$$\boxed{\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\|\vec{n_1}\times\vec{n_2}\|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}\right)}$$



Si les deux vecteurs sont colinéaires, on a deux cas :

- Les plans sont strictement parallèles (intersection vide)
- Les plans sont confondus.

En résumé :

Plans *sécants* (intersection = une droite)	Plans *perpendiculaires* (plans sécants formant un angle droit)	Plans *parallèles* (aucun point d'intersection)	Plans *confondus* (un plan parallèle à lui-même)
			
$\alpha \nparallel \beta$	$\alpha \perp \beta$	$\alpha \,//\, \beta$	$\alpha = \beta$

Exercice : On considère le plan α parallèle à la droite d_{OI} et passant par les points $A(0;2;0)$ et $B(1;0;2)$, ainsi que le plan β passant par le point $P(1;2;-2)$ et de vecteur normal : $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

a) Écrire les équations cartésiennes des plans α et β.
b) Calculer l'angle aigu φ entre les plans α et β.

➢ ***Géométrie vectorielle Série 5 exercice 21***

2.3 Produit mixte

Définition :
Le ***produit mixte*** des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$, noté $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}]$, est le nombre réel défini par: $[\vec{\boldsymbol{a}};\ \vec{\boldsymbol{b}};\ \vec{\boldsymbol{c}}] = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}})$

Exemples : *Soit les vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Calculer :

- $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] =$

- $[\vec{a};\ \vec{c};\ \vec{b}] =$

- $[\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c};\ \vec{b};\ \vec{c}] =$

Propriétés :
Quels que soient les vecteurs $\vec{a}, \vec{a'}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ et les nombres α et β, on a:

1. $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] = [\vec{b};\ \vec{c};\ \vec{a}] = [\vec{c};\ \vec{a};\ \vec{b}]$ et $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] = -[\vec{a};\ \vec{c};\ \vec{b}] = -[\vec{b};\ \vec{a};\ \vec{c}] = -[\vec{c};\ \vec{b};\ \vec{a}]$

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

3. $[\alpha\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] = \alpha[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}]$ *et* $[\vec{a} + \vec{a}';\ \vec{b};\ \vec{c}] = [\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] + [\vec{a'};\ \vec{b};\ \vec{c}]$

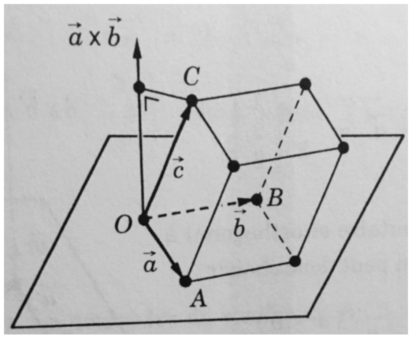
4. $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants.

5. $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] > 0 \ \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ est une base directe.

6. $[\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c};\ \vec{b};\ \vec{c}] = [\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}]$

7. Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, on a: $[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = Det(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$

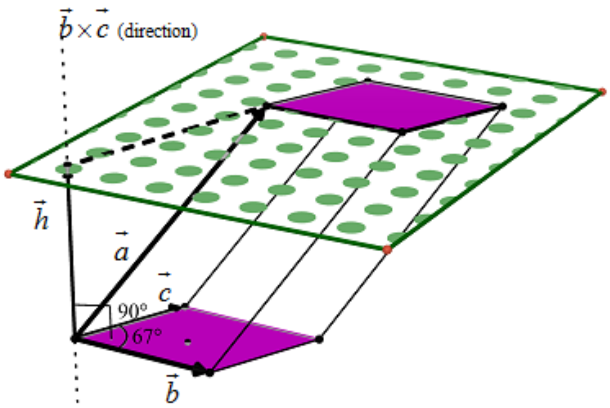
Interprétation Géométrique :

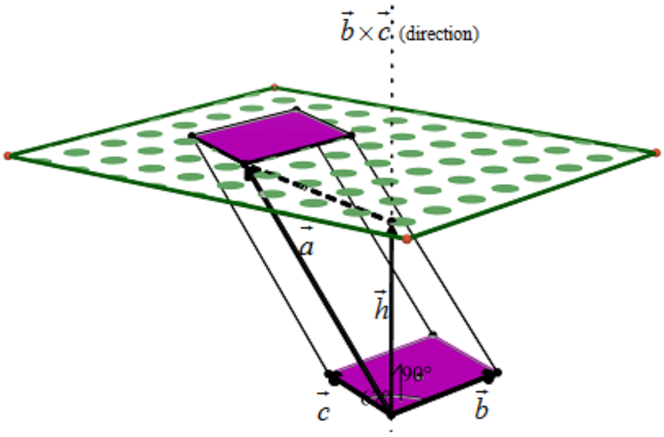


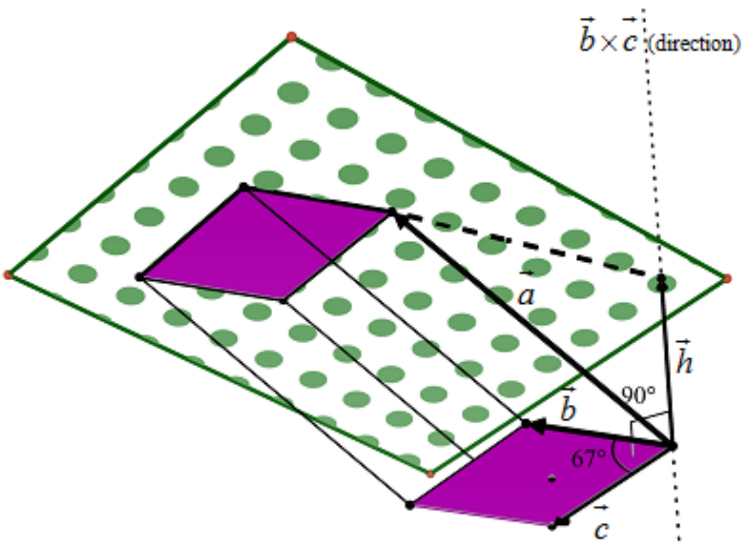
Si O, A, B et C sont quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

$\left|[\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c}]\right|$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

Illustrations :







$$\|\vec{h}\| = \underbrace{\|\vec{a}\,'\|}_{\vec{a}\,'\text{ est la projection orthogonale du vecteur } \vec{a}\,'\text{ sur le vecteur } \vec{b}\times\vec{c}} = \frac{\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|}{\left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\|}$$

Le volume du parallélépipède est : $V = \underbrace{\left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\|}_{base} \cdot \underbrace{\left\|\vec{h}\right\|}_{hauteur} = \left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$ d'où $V = \left|\left[\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right]\right|$

La valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallélépipède dont $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ forment trois arêtes partant d'un même sommet.

Remarques

- Si $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)>0$, alors le trièdre $\left(\vec{a}\ ,\vec{b}\ ,\vec{c}\right)$ est orienté positivement (base directe).
- Si $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=0$, alors le parallélépipède est plat. La nullité du produit mixte de trois vecteurs est une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ soient coplanaires (linéairement dépendants).
- Si $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)<0$, alors le trièdre $\left(\vec{a}\ ,\vec{b}\ ,\vec{c}\right)$ est orienté négativement (base rétrograde).
- Pour le calcul de $\left[\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right]$, il est utile d'appliquer le déterminant suivant :

$$\left[\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Vérification

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{matrix}a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3\end{matrix}=\left(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3\right)-\left(a_3b_2c_1+_1b_3c_2a_1+c_3a_2b_1\right)$$

$$\underbrace{a_1\left(b_2c_3-b_3c_2\right)+a_2\left(b_3c_1-b_1c_3\right)+a_3\left(b_1c_2-b_2c_1\right)}_{a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\ b_3c_1-b_1c_3\\ b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left[\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right]$$

Exemple :

1) *On donne les vecteurs* $\vec{a}=8\vec{i}-9\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ *et* $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}-8\vec{k}$
Calculer le produit mixte $\left[\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right]$

2) Calculer le volume du parallélépipède dont $\vec{a};\vec{b}$ *et* $\vec{c}$ forment les trois arêtes partant du sommet O (origine).

➢ ***Géométrie vectorielle Série 6 exercices 1 à 7***

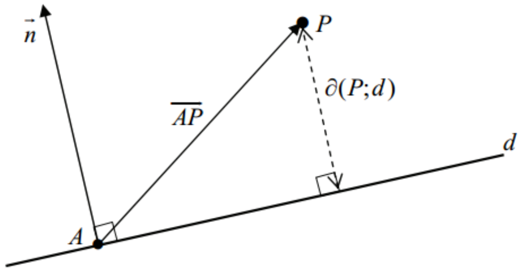
3. Géométrie analytique

Les coordonnées des points seront données relativement à un repère orthonormé directe $\mathcal{R}(O, I, J, K)$ de $\mathbb{R}^3$ et les composantes des vecteurs seront relatives à la base $\mathcal{B}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ associée.

3.1 Distance d'un point à une droite

La distance $\delta(P, d)$ d'un point P de l'espace à la droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$ est donnée par :

$$\boxed{\delta(P, d) = \frac{\|\vec{\boldsymbol{d}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{d}}\|}}$$



Car :

Partons du $\sin(\varphi) = \frac{\delta(P,d)}{\|\overrightarrow{AD}\|}$ et de la formule $\|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\| = \|\vec{\boldsymbol{a}}\| \cdot \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \,\mathbf{sin}\,(\boldsymbol{\varphi})$ avec $\vec{a} = \vec{d}$ *et* $\vec{b} = \overrightarrow{AP}$

Égalisons le sinus dans les deux formules : $\sin(\varphi) = \frac{\delta(P,d)}{\|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{\|\vec{\boldsymbol{d}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{d}}\| \cdot \|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}$

Isolons $\delta(P, d)$:

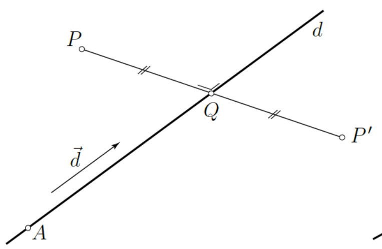
$$\delta(P, d) = \frac{\|\vec{\boldsymbol{d}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{d}}\| \cdot \|\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|} \|\overrightarrow{AP}\| = \frac{\|\vec{\boldsymbol{d}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\|}{\|\vec{\boldsymbol{d}}\|}$$

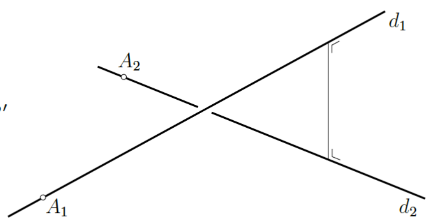
Exercice : Calculer la distance du point $P(6; -4; 1)$ à la droite $d: \begin{cases} x = 3 - 6t \\ y = -1 + t \\ Z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

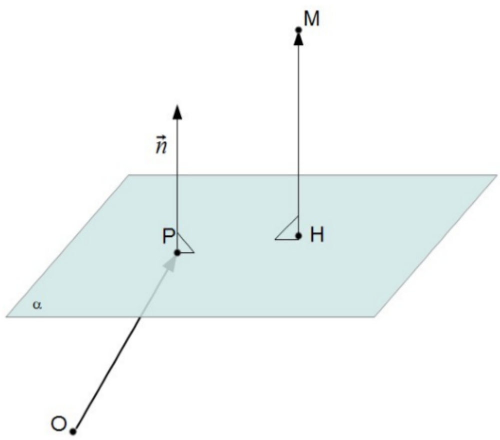
On note P un point et d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

Distance du point P à la droite d	$\delta(P; d) = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$	⏀
Projection orthogonale de P sur d	$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \vec{d}$	⏀
Symétrique de P par rapport à d	$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + 2 \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2} \vec{d}$	⏀





3.2 Distance d'un point à un plan



Si α est le plan d'équation $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$
et si $M(x_0; y_0; z_0)$ est un point de l'espace,
la distance de M à α , notée $\boldsymbol{\delta(M\ ;\ \alpha)}$ est la plus courte distance entre M et un point du plan α .

Pour la calculer on construit le point $H(h_1; h_2; h_3) \in \alpha$ de telle sorte que $\overrightarrow{HM} \perp \alpha$. H est le projeté orthogonal de M sur α .

La distance cherchée est donc : $\boldsymbol{\delta(M\ ;\ \alpha)} = \| \overrightarrow{HM} \|$.

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à α , $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{HM} = \lambda\vec{n}$.

Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires, on a aussi[1] :

$$\frac{\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}}{\|\overrightarrow{HM}\|\cdot\|\vec{n}\|} = \cos(\varphi) = 1\ (ou\ -1)\ car\ \varphi = 0\ (ou\ \pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}}{\|\overrightarrow{HM}\|\cdot\|\vec{n}\|} = \pm 1$$

On a donc :

$$\frac{|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \|\overrightarrow{HM}\|$$

On sait d'autre part que : $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan et que $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Et aussi : $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} x_0 - h_1 \\ y_0 - h_2 \\ z_0 - h_3 \end{pmatrix}$

Ce qui donne : $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = (x_0 - h_1)a + (y_0 - h_2)b + (z_0 - h_3)c = ax_0 - ah_1 + by_0 - bh_2 + cz_{z_0} - ch_3$

Comme H est un point du plan α, ses coordonnées satisfont à l'équation cartésienne de α et donc :

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 + d = 0 \Leftrightarrow -ah_1 - bh_2 - ch_3 = d$$

et on a donc: $|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|$

Au final, on obtient :

$$\boxed{\|\overrightarrow{\boldsymbol{HM}}\| = \frac{|\boldsymbol{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2}}} = \boldsymbol{\delta(M\ ;\ \alpha)}}$$

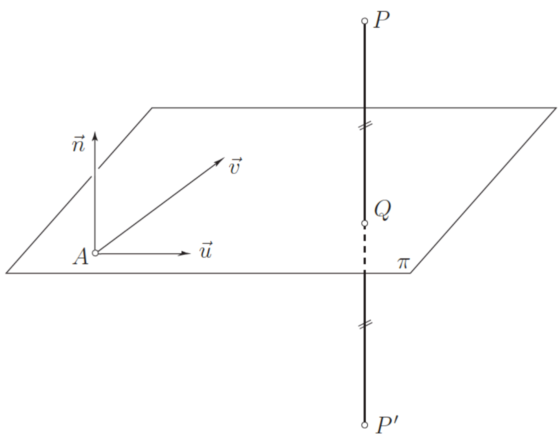
[1] Avec la formule : $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = \|\vec{\boldsymbol{a}}\|\cdot\|\vec{\boldsymbol{b}}\|\cdot\cos(\boldsymbol{\varphi})$

Exercice :

Soit le point $P(3;1;-1)$ *et le plan* $\alpha: 5x+11y-z-11=0$

Calculer la distance $\delta(P\,;\,\alpha)$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?



On note $P(x_0\,;y_0\,;z_0)$ un point et π un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$

Distance du point P au plan π	$\delta(P;\pi)=\dfrac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	⦶
Projection orthogonale de P sur π	$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\lVert\vec{n}\rVert^2}\,\vec{n}$	⦶
Symétrique de P par rapport à π	$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}-2\,\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{\lVert\vec{n}\rVert^2}\,\vec{n}$	⦶

➢ ***Géométrie vectorielle série 6 ex 8 à 15***

3.3 Sphère

La sphère Σ de centre C et de rayon r (où $r \in \mathbb{R}_+$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\delta(C, M) = r$.

On a donc :

$$\boxed{M \in \Sigma \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\mathrm{CM}}\| = \mathrm{r}}$$

Équation d'une sphère :

La sphère Σ de centre $C(\alpha; \beta; \gamma)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que :

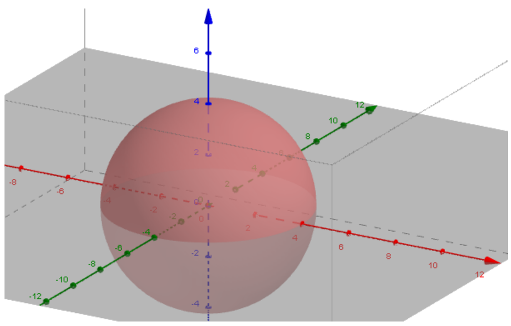
$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2}$$

Cette relation est appelée ***équation cartésienne*** (canonique de la sphère Σ.

L'équation générale d'une sphère est de la forme :

$$\boxed{ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0, a \neq 0}$$

Exemple : L'équation de la sphère centrée à l'origine et de rayon 4 est d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 16$



Plan tangent à une sphère

Soit T un point de la sphère Σ de centre C et de rayon r. Si P est un point quelconque de l'espace et si τ désigne le plan tangent à la sphère Σ au point T, on a :

$$P \epsilon \tau \Leftrightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0$$
$$\text{Et } P \in \tau \Leftrightarrow \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2$$

Le plan tangent en un point $T(x_0; y_0; z_0)$ de la sphère Σ de centre $C(\alpha; \beta; \gamma)$ et de rayon r a pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x_0-\alpha)(x-\alpha) + (y_0-\beta)(y-\beta) + (z_0-\gamma)(z-\gamma) - r^2 = 0}$$

Si la sphère est donnée par l'équation $ax^2 + ay^2 + az^2 + 2bx + 2cy + 2dz + e = 0$, l'équation du plan tangent s'écrit :

$$\boxed{ax_0x + ay_0y + az_0z + b(x_0 + x) + c(y_0 + y) + d(z_0 + z) + e = 0}$$

Exercice : *On considère le plan α parallèle à la droite (OI) et passant par les points $A(0;2;0)$ et $B(1;0;2)$, ainsi que le plan β passant par le point $P(1;2;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$.*

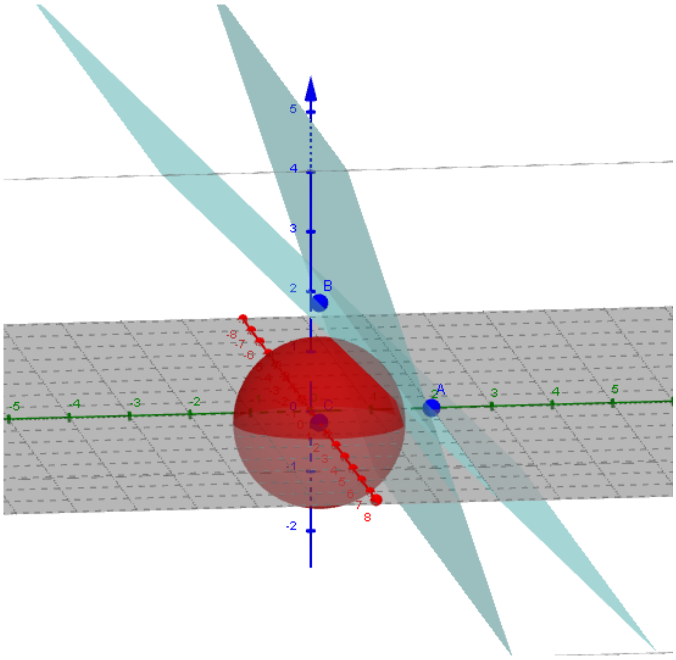
1) Écrire les équations cartésiennes des plans α et β.

2) Calculer l'angle aigu φ que forment les plans α et β.

3) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre $C(1;0;0)$ et tangente au plan α.

4) Déterminer les coordonnées du centre Q et le rayon ρ du cercle Γ d'intersection de la sphère Σ avec le plan β.

5) Montrer que la droite d'intersection d des plans α et β est tangente au cercle Γ.



➢ ***Géométrie Vectorielle Série 7***

Solution

1) a) Vecteurs directeurs du plan α :

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Equation cartésienne du plan $\alpha = (A ; \vec{i} ; \vec{v})$:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & -2 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où $\alpha : y + z - 2 = 0$.

b) L'équation cartésienne du plan β est de la forme

$$3y + z + d = 0 .$$

$P(1;2;-2) \in \beta \iff 3 \cdot 2 + (-2) + d = 0$,
d'où $d = -4$.

Ainsi $\beta : 3y + z - 4 = 0$.

2) Vecteur normal au plan α : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vecteur normal au plan β : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{n}\|} = \arccos \frac{3+1}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 26{,}57^\circ .$$

3) Rayon de la sphère Σ :

$$r = \delta(C, \alpha) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

soit $$r = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Equation cartésienne de la sphère Σ : $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$.

4)

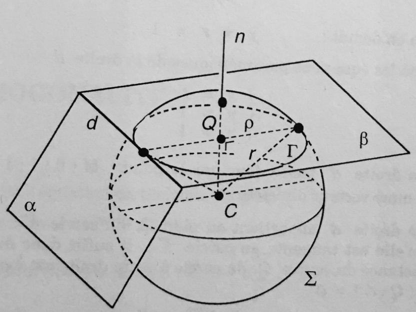


Fig. 48

Le centre Q du cercle Γ est le point d'intersection avec le plan β de la perpendiculaire n à ce plan, menée par le centre $C(1;0;0)$ de la sphère Σ.

Vecteur directeur de la normale n : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Equations paramétriques de n : $\begin{cases} x = 1 & (1) \\ y = 3k & (2) \\ z = k & (3) \end{cases}$

Equation du plan β : $3y + z - 4 = 0$ (4)

On obtient les coordonnées du point Q en résolvant le système formé des équations (1), (2), (3) et (4) ; on trouve $Q\left(1 ; \frac{6}{5} ; \frac{2}{5}\right)$.

On calcule le rayon ρ du cercle Γ à l'aide du théorème de Pythagore : $\rho = \sqrt{r^2 - \|\overrightarrow{CQ}\|^2}$.

On a $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{CQ}\|^2 = \frac{8}{5}$,

d'où $\rho = \sqrt{2 - \frac{8}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Les équations des plans α et β constituent un système d'équations cartésiennes de la droite d'intersection d de ces deux plans :

$$\begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ 3y + z - 4 = 0 \end{cases} .$$

On en déduit : $y = z = 1$,

d'où les équations paramétriques de la droite d :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} .$$

La droite d passe donc par le point $M(0;1;1)$ et admet $\vec{i}$ comme vecteur directeur.

La droite d appartient au plan β du cercle Γ. Pour démontrer qu'elle est tangente au cercle Γ, il suffit donc de vérifier que la distance du centre Q du cercle à cette droite est égale au rayon ρ : $\delta(Q,d) = \rho$.

On a $\delta(Q,d) = \dfrac{\|\overrightarrow{MQ} \times \vec{i}\|}{\|\vec{i}\|} = \|\overrightarrow{MQ} \times \vec{i}\|$.

Or
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MQ} \times \vec{i} &= (\vec{i} + \tfrac{1}{5}\vec{j} - \tfrac{3}{5}\vec{k}) \times \vec{i} \\ &= (\vec{i} \times \vec{i}) + \tfrac{1}{5}(\vec{j} \times \vec{i}) - \tfrac{3}{5}(\vec{k} \times \vec{i}) \\ &= -\tfrac{1}{5}\vec{k} - \tfrac{3}{5}\vec{j} , \end{aligned}$$

d'où $\delta(Q,d) = \sqrt{(-\frac{3}{5})^2 + (-\frac{1}{5})^2} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \rho$.

Table des matières