

Géométrie vectorielle Série 3

Ne pas écrire sur l'énoncé. Résoudre les exercices sur des feuilles à part

Exercice 1: Soit la droite d d'équations paramétriques $d: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

- a) Le point $A(3; 5; 2)$ appartient-il à d ?
- b) On donne les points $B(1; 6; 0)$ et $C(3; 0; -2)$. La droite (BC) est-elle parallèle à d ?
- c) Etablissez une représentation paramétrique de la droite (BC) .

Exercice 2: Soit d la droite passant par le point $A(2; 2; -4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- a) Écrire un système d'équations paramétriques de d
- b) Les points $R(3; 4; -1)$; $S(4; 6; -2)$ et $T(-1; -4; -13)$ sont-ils des éléments de d ?
- c) Déterminer les points suivants s'ils existent
 1. le point de d d'abscisse 5
 2. le point d'ordonnée 10
 3. le point de cote 3
- d) Déterminer l'intersection de d avec les plans (xOy) , (xOz) et (yOz) .

Exercice 3: La droite d a pour équations cartésiennes: $\frac{x-3}{3} = -\frac{y}{6} = \frac{z-2}{2}$

- a) Donner un vecteur directeur de d
- b) Donner un système paramétrique de d
- c) Donner une représentation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite e qui est parallèle à d et qui passe par le point $C(1; 0; -2)$.

Exercice 4: La droite d a pour équations cartésiennes: $\frac{x-3}{-1} = y = \frac{z-4}{2}$

- a) Déterminer les traces de d
- b) donner une représentation paramétrique de la droite d
- c) Représenter graphiquement la droite d (esquisse soignée !)

Exercice 5:

La droite d a pour équations cartésiennes $x = \frac{y+2}{2} = \frac{4-z}{2}$:

- a) Déterminer les traces de d
- b) donner une représentation paramétrique de la droite d
- c) Représenter graphiquement la droite d (esquisse soignée !)

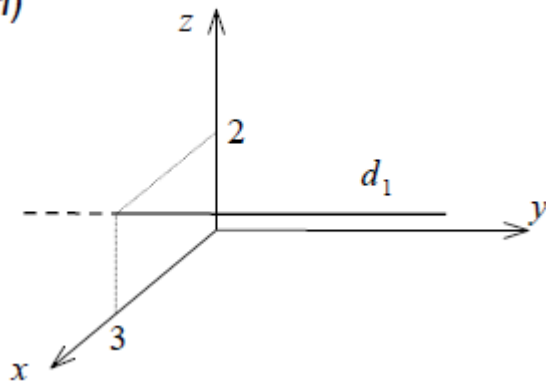
Exercice 6: La droite d a pour équations cartésiennes: $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z-2}{2}$

- a) Déterminer les traces de d
- b) donner une représentation paramétrique de la droite d
- c) Représenter graphiquement la droite d (esquisse soignée !)

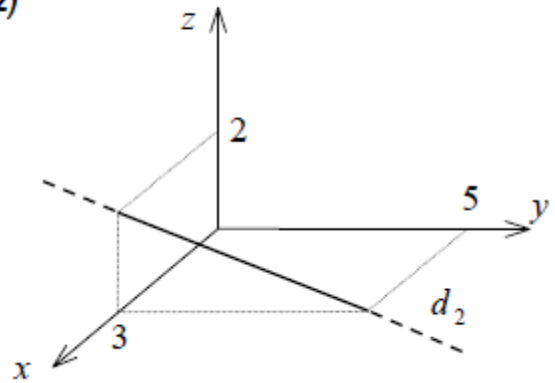
Exercice 7:

Déterminer les équations cartésiennes et paramétriques des droites:

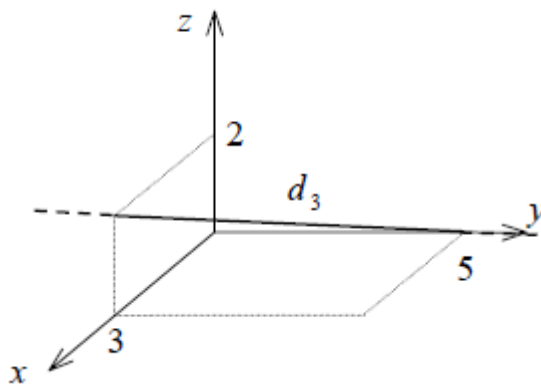
7.1)



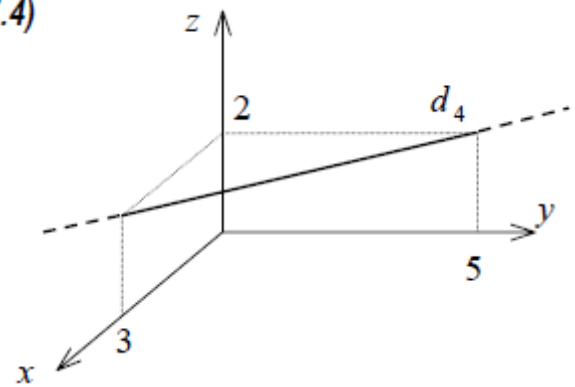
7.2)



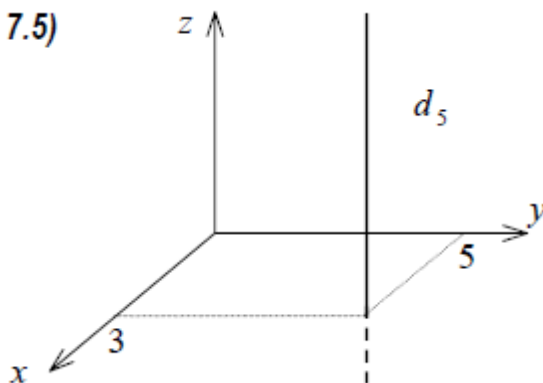
7.3)



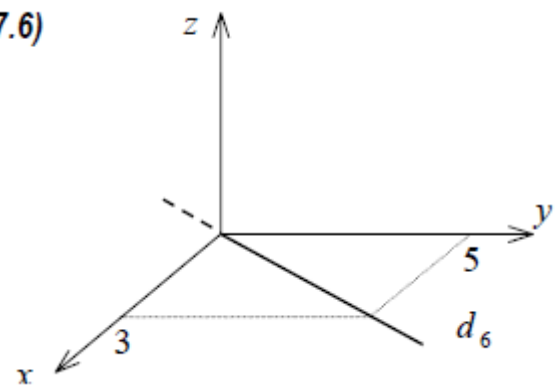
7.4)



7.5)



7.6)

**Exercice 8:**

Soient les droites $d_1: \frac{x-3}{2} = -y - 1 = \frac{z-1}{3}$ et $d_2: -x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$

a) Calculer l'intersection $d_1 \cap d_2$

b) En déduire la position relative des deux droites considérées.

Exercice 9:

Soient les droites $d: 1 - x = y - 3 = \frac{z-3}{4}$ et $d': \frac{x}{3} = 2 - y = \frac{z+19}{2}$

- a) Déterminer l'intersection $d \cap d'$
 b) En déduire la position relative des deux droites considérées

Exercice 10:

Soit Les droites $d: x - 1 = y + 1 = \frac{z+3}{4}$ et $d': x - 5 = y - 7 = \frac{z-1}{4}$

- a) Déterminer l'intersection $d \cap d'$
 b) En déduire la position relative des deux droites considérées.

Exercice 11:

Soient les droites $d: x - 1 = y + 1 = \frac{z+3}{4}$ et $d': x - 13 = y - 11 = \frac{z-45}{4}$

- a) Déterminer l'intersection $d \cap d'$
 b) En déduire la position relative des deux droites considérées.

Exercice 12: Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la droite:

- a) parallèle à l'axe Oy et passant par le point $(5; 4; 1)$
 b) parallèle à l'axe Oz et passant par le point $(2; 0; -7)$
 c) parallèle à la droite d'équations $\frac{x+4}{2} = y - 3 = \frac{2-z}{5}$ et passant par le point $(1; -4; 6)$
 d) parallèle à la droite d'équations $\frac{x+4}{2} = \frac{3-y}{4} = \frac{z}{9}$ et passant par le point $(11; -2; 0)$

Solutions de la Série 3 de Géométrie vectorielle:

Exercice 1: a) non b) oui c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

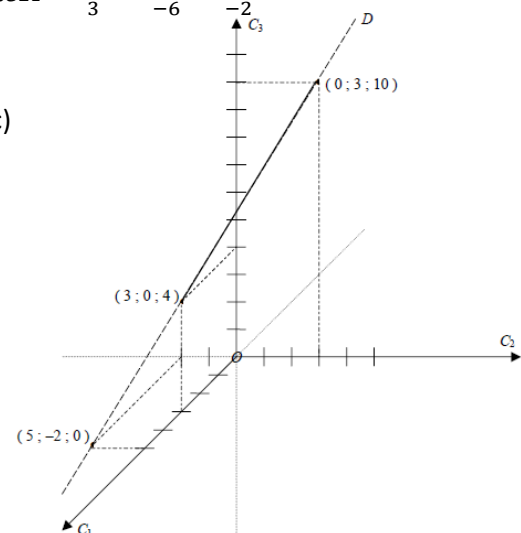
Exercice 2: a) $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$ b) $R \in d, S \notin d, T \in d$ c) 1. $(5; 8; 5)$ 2. $(6; 10; 8)$ 3. $(\frac{13}{3}; \frac{20}{3}; 3)$

d) $(\frac{10}{3}; \frac{14}{3}; 0); (1; 0; -7); (0; -2; -10)$

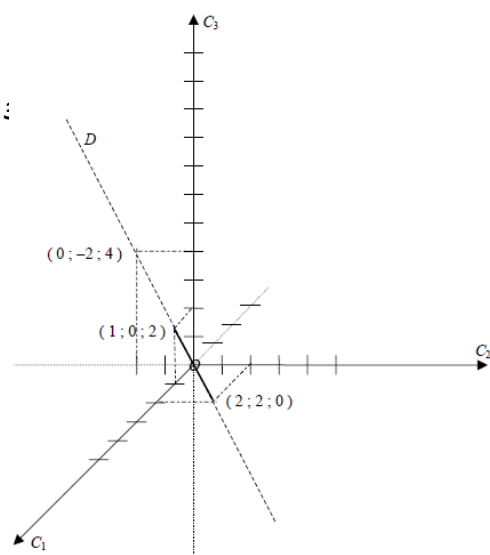
Exercice 3: a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = -6k, k \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2k \end{cases}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{-2}$

Exercice 4: a) $(5; -2; 0); (3; 0; 4); (0; 3; 10)$ b) $\begin{cases} x = -\lambda + 3 \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda + 4 \end{cases}$ c)

Exercice 5: a) $(2; 2; 0); (1; 0; 2); (0; -2; 4)$ b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 2, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda + 4 \end{cases}$



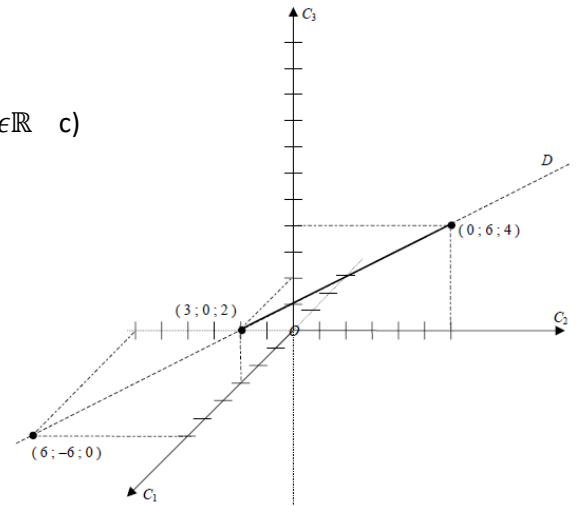
c)



Exercice 6: a) $(6; -6; 0); (3; 0; 2); (0; 6; 4)$ b) $\begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -6\lambda \\ z = -2\lambda + 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ c)

Exercice 7:

	Représentation paramétrique	Equations cartésiennes
1	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$	$x = 3; y \in \mathbb{R}; z = 2$
2	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\frac{y}{-5} = \frac{z-2}{2}; x = 3$
3	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-2}$
4	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\frac{y}{-5} = \frac{x-3}{3}; z = 2$
5	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$	$x = 3; y = 5; z \in \mathbb{R}$
6	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$	$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}; z = 0$



Exercice 8: a) $d_1 \cap d_2 = \{(1; 0; -2)\}$ b) sécantes

Exercice 9: a) $d \cap d' = \emptyset$ b) gauches

Exercice 10: a) $d \cap d' = \emptyset$ b) parallèles et distinctes

Exercice 11: a) $d \cap d' = d = d'$ b) parallèles et confondues

Exercice 12:

	Equations paramétriques	Equations cartésiennes
1	$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 + k \\ z = 1 \end{cases} k \in \mathbb{R}$	$x = 5; z = 1, y \in \mathbb{R}$
2	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -7 + k \end{cases} k \in \mathbb{R}$	$x = 2; y = 0; z \in \mathbb{R}$
3	$\begin{cases} x = -4 + 2k \\ y = 3 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases} k \in \mathbb{R}$	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-(-4)}{1} = z - 6$
4	$\begin{cases} x = 11 + 2k \\ y = -2 - 4k \\ z = 9k \end{cases} k \in \mathbb{R}$	$\frac{x-11}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{9}$

Corrigé exercice 8:

Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$$I = II = III$$

$$D: \frac{x-3}{2} = -y-1 = \frac{z-1}{3} \quad \text{sur cette ligne, il y a deux équations : } I = II \quad \text{et } II = III \quad \text{ou } I = III \quad !!!$$

$$D': \quad -x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{même remarque.}$$

Il s'agit de résoudre un système à trois inconnues, formé de quatre équations.

Ce système peut admettre :

- ❖ aucune solution (système incompatible, droite parallèles ou gauches)
- ❖ une **solution unique** qui donnera les coordonnées du point unique commun à D et D'
- ❖ une **infinité de solutions** dans les cas où D et D' sont des droites confondues.

Des équations de D' , on tire : $y-3 = -3x$ et $z-2 = -4x$, ce qui donne : $y = -3x+3$ et $z = -4x+2$

Injectons ces expressions dans les équations de D : $\frac{x-3}{2} = -(-3x+3)-1 = \frac{(-4x+2)-1}{3}$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :

$$I = II \text{ donne : } \frac{x-3}{2} = 3x-4 \Rightarrow x-3 = 6x-8 \Rightarrow 8-3 = 6x-x \Rightarrow 5 = 5x \Rightarrow x=1$$

$$II = III \text{ donne : } 3x-4 = \frac{-4x+1}{3} \Rightarrow 9x-12 = -4x+1 \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow x=1.$$

C'est bien le cas, donc le système est compatible et admet une solution unique :

$$x=1 \quad y = -3 \cdot 1 + 3 = 0 \quad z = -4 \cdot 1 + 2 = -2$$

Donc les deux droites D et D' sont sécantes : $D \cap D' = \{ (1; 0; -2) \}$

Vérification : remplacer x , y et z dans les équations de D et D' .

Une **autre méthode** (plus simple ?) est décrite en page 5.

Autre méthode pour calculer l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$$D: \frac{x-3}{2} = -y-1 = \frac{z-1}{3}$$

$$D': -x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4} \Leftrightarrow \frac{x-0}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$$

Cette méthode consiste à écrire une équation paramétrique de l'une des deux droites, puis à substituer $(x; y; z)$ dans l'équation cartésienne de l'autre droite.

Equation paramétrique de D' : $(x; y; z) = (0; 3; 2) + \lambda \cdot (-1; 3; 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc $x = -\lambda$; $y = 3 + 3\lambda$; $z = 2 + 4\lambda$

Substituons ces trois égalités dans l'équation cartésienne de D :

$$D: \frac{-\lambda-3}{2} = -(3+3\lambda)-1 = \frac{(2+4\lambda)-1}{3}$$

C'est un système de 2 équations à une inconnue (λ).

Il y a une intersection si et seulement si ce système possède une solution.

$$\text{Résolvons : } \begin{cases} \frac{-\lambda-3}{2} = -4-3\lambda \\ -4-3\lambda = \frac{1+4\lambda}{3} \end{cases}$$

$$-\lambda-3 = -8-6\lambda \quad \text{et} \quad -12-9\lambda = 1+4\lambda$$

$$5\lambda = -5 \quad \text{et} \quad -13 = 13\lambda$$

$\lambda = -1$ et $-1 = \lambda$; c'est la solution du système, donc les deux droites ont une intersection en :

$(x; y; z) = (0; 3; 2) + (-1) \cdot (-1; 3; 4)$, c'est à dire en : $(1; 0; -2)$.

Corrigé
exercice
9:

Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$$D: 1-x = y-3 = \frac{z-3}{4}$$

$$D': \frac{x}{3} = 2-y = \frac{z+19}{2}$$

Même principe que l'exercice précédent.

Isolons, à partir des équations de D , y et z en fonction de x :

$$1-x = y-3 \Rightarrow 4-x = y \Rightarrow \boxed{y = 4-x}$$

$$1-x = \frac{z-3}{4} \Rightarrow 4-4x = z-3 \Rightarrow \boxed{z = 7-4x}$$

Injectons ces expressions dans les équations de D' : $\frac{x}{3} = 2 - (4-x) = \frac{(7-4x)+19}{2}$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :

La 1^{ère} égalité de D' donne : $\frac{x}{3} = 2 - (4-x) \Rightarrow \frac{x}{3} = x-2 \Rightarrow x = 3x-6 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = 3$

La 2^{ème} égalité de D' donne : $2 - (4-x) = \frac{(7-4x)+19}{2} \Rightarrow x-2 = 12-2x \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

Nous constatons que les équations de D' ne peuvent pas être satisfaites par des valeurs x, y, z qui satisfont simultanément les équations de D . Ceci signifie simplement que les deux droites n'ont pas un point commun dont les coordonnées pourraient satisfaire toutes les contraintes posées par les quatre équations : $D \cap D' = \{ \}$.

Donc D et D' sont gauches ou strictement parallèles. Comment préciser laquelle de ces deux éventualités est la bonne ?

En regardant le vecteur directeur de chaque droite :

$$D: \vec{V}_D = (-1; 1; 4) \quad \text{et} \quad D': \vec{V}_{D'} = (3; -1; 2)$$

Ces deux vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles.

Elles sont donc gauches.

Autre méthode pour calculer l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$$D: 1-x = y-3 = \frac{z-3}{4}$$

$$D': \frac{x}{3} = 2-y = \frac{z+19}{2} \Leftrightarrow \frac{x-0}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-(-19)}{2}$$

Même méthode que ci-dessus :

Equation paramétrique de D' : $(x; y; z) = (0; 2; -19) + \lambda \cdot (3; -1; 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Donc $x = 3\lambda$; $y = 2 - \lambda$; $z = -19 + 2\lambda$

Substituons ces trois égalités dans l'équation cartésienne de D :

$$D: 1-3\lambda = 2-\lambda-3 = \frac{-19+2\lambda-3}{4}$$

C'est un système de 2 équations à une inconnue (λ).

Il y a une intersection si et seulement si ce système possède une solution.

$$\text{Résolvons : } \begin{cases} 1-3\lambda = -\lambda-1 \\ -\lambda-1 = \frac{-22+2\lambda}{4} \end{cases}$$

$$2 = 2\lambda \quad \text{et} \quad -4\lambda - 4 = -22 + 2\lambda$$

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad 18 = 6\lambda$$

$\lambda = 1$ et $\lambda = 3$; Il n'y a pas une solution satisfaisant les deux équations en même temps, donc les deux droites n'ont pas d'intersection.