

Géométrie vectorielle Série 4

Ne pas résoudre les exercices sur l'énoncé mais sur des feuilles quadrillées

Exercice 1 : On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

Calculer les produits scalaires :

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

3) $\vec{a} \cdot \vec{c}$

5) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

2) $\vec{b} \cdot \vec{a}$

4) $\vec{b} \cdot \vec{c}$

6) $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Exercice 2 : On considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les paires de vecteurs orthogonaux.

2) Calculer : $(\vec{a} + \vec{d} + \vec{g}) \cdot (\vec{b} + \vec{e} - \vec{m})$, $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{f}$ et $(\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{f} + \vec{e})$

3) Calculer : $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$, $(\vec{b} \cdot \vec{h})\vec{c}$, $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{m}$, $(\vec{g} \cdot \vec{a})\vec{d}$ et $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{a})$

Exercice 3 : Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? Sont-elles perpendiculaires ?

1) $A(8; -1; 3)$, $B(11; 11; 5)$, $C(4; 1; -1)$, $D(6; 0; 2)$

2) $A(7; 5; 1)$, $B(3; 2; 7)$, $C(-3; -1; 0)$, $D(9; 9; 9)$

Exercice 4 : Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

1) $A(-4; 5; 3)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(5; 5; 4)$, $D(2; 9; 2)$

2) $A(7; -2; 0)$, $B(5; 2; 2)$, $C(10; 5; 1)$, $D(12; 1; -1)$

Exercice 5 :

Déterminer les nombres réels a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit orthogonal à chacun des deux vecteurs : $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

On donne les points $A(1; 2; -2)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 0; -3)$ et $D(-5; 12; 0)$

Calculer une valeur de l'angle des droites (AB) et (CD)

Exercice 7 : Calculer les angles du triangle de sommets $A(5; -3; 8)$, $B(1; 7; 2)$ et $C(-3; 2; 5)$

Exercice 8 :

Trouver la projection orthogonale du vecteur \vec{v} sur le vecteur \vec{u} . Déterminer la longueur de ce vecteur.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} & \text{c) b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} & \text{e) b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} & \text{d) b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Exercice 9 : Soit A un point tel que $\|\vec{OA}\| = 2$

Représenter les ensembles de points suivants :

$$1) d = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 2\} \quad 2) e = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = -2\} \quad 3) f = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 0\}$$

Exercice 10: Soit A et B deux points dans l'espace tels que $\|\vec{OA}\| = 6$ et $\|\vec{OB}\| = 8$, le point B n'appartenant pas à la droite (OA) .

Déterminer les ensembles de points suivants :

$$\begin{array}{l} 1) E_1 = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 0\} \\ 2) E_2 = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 36\} \\ 3) E_3 = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 18 \text{ et } \vec{OB} \cdot \vec{OM} = 32\} \\ 4) E_4 = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = \vec{OB} \cdot \vec{OM}\} \end{array}$$

Exercice 11 : Soit A un point tel que $\|\vec{OA}\| = 6$

Représenter les ensembles de points suivants :

$$\begin{array}{l} 1) d = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 18\} \\ 2) e = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 12\} \\ 3) f = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 0\} \\ 4) g = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = -6\} \end{array}$$

Exercice 12 : Soit A et B deux points tels que $\|\vec{OA}\| = 2$ et $\|\vec{OB}\| = 3$, $B \notin (OA)$

Représenter les ensembles de points suivants :

$$\begin{array}{l} 1) d = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = 2 \text{ et } \vec{OB} \cdot \vec{OM} = 0\} \\ 2) e = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = -2 \text{ et } \vec{OB} \cdot \vec{OM} = -3\} \\ 3) f = \{M | \vec{OA} \cdot \vec{OM} = \vec{OB} \cdot \vec{OM}\} \end{array}$$

Exercice 13 : On donne les points $A(-2; 3; -2)$ et $B(-6; -1; 1)$.

Déterminer le point P de la droite D_{0l} tels que le triangle APB soit rectangle en P .

Solutions Série 4 :

Exercice 1 :

1) 61 2) 61 3) 0 4) -19 5) 61 6) 66

Exercice 2 :

- 1) \vec{a} et \vec{d} ; \vec{a} et \vec{g} ; \vec{b} et \vec{h} ; \vec{d} et \vec{m}
 2) $(\vec{a} + \vec{d} + \vec{g}) \cdot (\vec{b} + \vec{e} - \vec{m}) = -15$; $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{f} = 1$ et $(\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{f} + \vec{e}) = 16$
 3) $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, $(\vec{b} \cdot \vec{h})\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{m} = \begin{pmatrix} 48 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$, $(\vec{g} \cdot \vec{a})\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{a}) = 0$

Exercice 3 :

- 1) orthogonales, non perpendiculaires 2) non orthogonales

Exercice 5 : $a = 4$ $b = -5$

Exercice 6 : $86,3^\circ$

Exercice 7 : $\alpha = 34,98^\circ$ $\beta = 53,38^\circ$ $\gamma = 91,64^\circ$

Exercice 8 : a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 48$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{122}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -72/61 \\ 168/61 \\ 192/61 \end{pmatrix}$, $\|\vec{v}'\| = \frac{48}{\sqrt{122}} \cong 4,35$

b) $\begin{pmatrix} 65/83 \\ 27/83 \\ -45/83 \end{pmatrix}$, $\frac{9}{\sqrt{83}}$ c) $\begin{pmatrix} 318/181 \\ -424/181 \\ -477/181 \end{pmatrix}$, $\frac{53}{\sqrt{181}}$ d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 6 e) $\begin{pmatrix} -12/49 \\ 32/49 \\ -20/49 \end{pmatrix}$, $\|\vec{v}'\| \cong 0,81$

Exercice 9 : 1) plan perpendiculaire à (OA) par le milieu du segment $[OA]$

2) plan perpendiculaire à (OA) par le point M' (où $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$)

3) plan perpendiculaire à (OA) par le point O .

Exercice 10 : 1) plan perpendiculaire à (OA) par O

2) plan perpendiculaire à (OA) par A

3) droite d'intersection du plan perpendiculaire à (OA) par le milieu de $[OA]$ et du plan perpendiculaire à (OB) par le milieu de $[OB]$

4) plan perpendiculaire à (AB) par O .

Exercice 11 : 1) plan perpendiculaire à (OA) par le milieu du segment $[OA]$ (= point M')

2) plan perpendiculaire à (OA) par le point M' (où $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$)

3) plan perpendiculaire à (OA) par le point O

4) plan perpendiculaire à (OA) par le point M' (où $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}$)

Exercice 13 : Deux solutions: $P_1(-1; 0; 0)$ et $P_2(-7; 0; 0)$