Géométrie vectorielle Série 5

Ne pas écrire sur l'énoncé !

Exercice 1

Soit Π le plan d'équation : $2x+3y-3z-5=0$.

a) Les points suivants appartiennent-ils au plan Π ? $A(0\,;2\,;2)$? $B\left(4;\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

b) Trouver trois points distincts C, D et E $\in \Pi$ et différents de A et B.

c) Trouver *deux vecteurs directeurs* et *un vecteur position* à Π.

d) Déterminer l'équation vectorielle et les équations paramétriques de Π .

Exercice 2

Soit Π le plan d'équation : $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}, k,n\in\mathbb{R}$.

a) Les points suivants appartiennent-ils au plan Π ? $\mathrm{A}(3;4;3)$ $\mathrm{B}(4;-3;8)$

b) Trouver deux points distincts C et D $\in \Pi$ et différents de A et B.

c) Trouver *deux vecteurs directeurs* et *un vecteur position* à Π.

Exercice 3

On donne les points $A(3;4;0), B(-3;8;1), C(1;2;-3), D(11;1;1), E(3;3;-1)$, $F(8;3;1), G(0;5;-1), P(-5;-2;-5)$ et $Q(0;4;-3)$

a) Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (ABC)

c) Montrer que la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC)

d) Montrer que la droite (FG) est strictement parallèle au plan (ABC)

Exercice 4

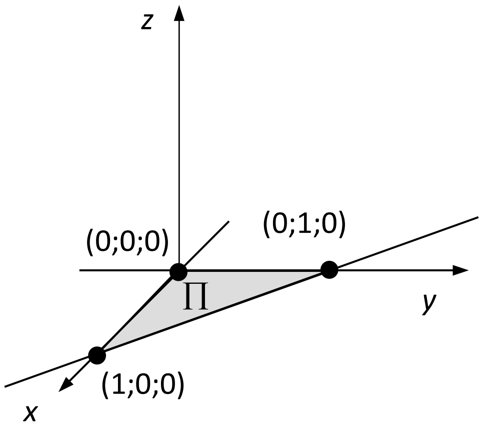
Trouver *les équations paramétriques* d'un plan $\prod$ passant par le point $A(2;0;-3)$ et Contenant les vecteurs suivants : $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$

Exercice 5 : La colonne de gauche sert à représenter graphiquement le plan,
Celle de droite définit celui-ci en donnant trois points non alignés lui appartenant.

a) Dessiner (à gauche) le plan satisfaisant les conditions (de droite).

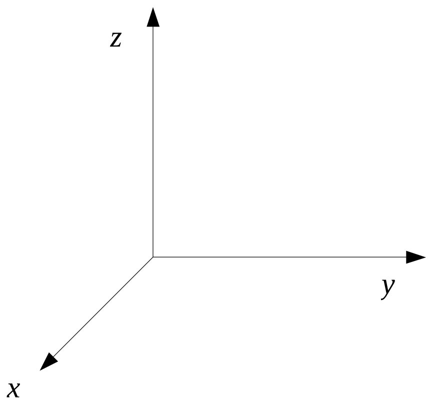
b) Trouver, avec ou sans calculs, l'équation paramétrique correspondante.

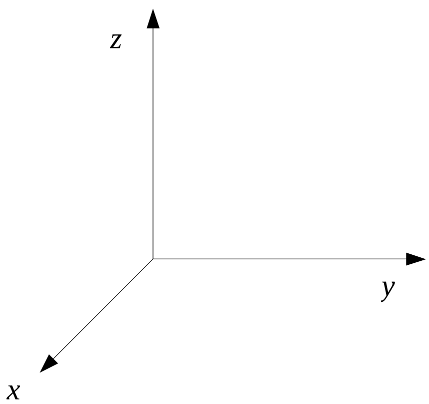
<table>
<tr>
<td>
Exemple :



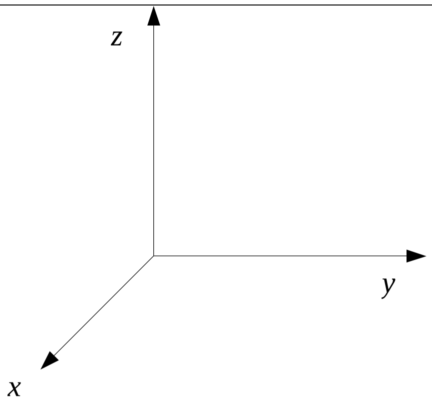
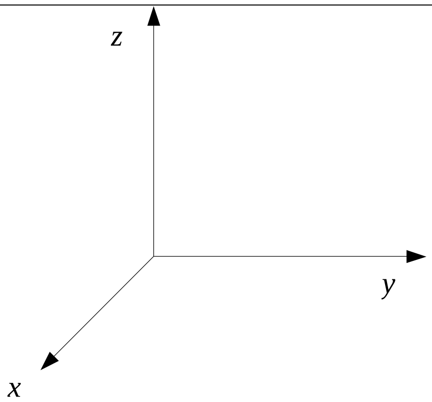
</td>
<td>
a) $(0;0;0)$, $(1;0;0)$ et $(0;1;0)$ $\in \Pi$

- Équation paramétrique de Π :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, s, $t \in \mathbb{R}$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>
b) $(0;0;2)$, $(1;0;2)$ et $(0;1;2)$ $\in \Pi$
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>
c) $(3;0;0)$, $(3;1;0)$ et $(3;0;1)$ $\in \Pi$
</td>
</tr>
</table>

	d) $(1;0;0)$, $(1;1;0)$ et $(0;0;1)$ $\in \Pi$ • Équation paramétrique de $\prod$:
	e) $(2;3;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$ $\in \Pi$ • Équation paramétrique de $\prod$:

Exercice 6 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite d et d'un plan α, dans les cas suivants :

a) $d: \begin{cases} x = -4 - 5k \\ y = 8 + 6k \\ z = 3 - k \end{cases}$ $\alpha: \; 2x + 3y - z - 5 = 0$

b) $d: \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 3 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3p - q \\ y = -2 - 5p + q \\ z = 7 + 3p - q \end{cases}$

c) $d = (AB), avec\ A(-1;0;4) et\ B(1;2;0)$ $\alpha: x - y + 2z - 3 = 0$

Exercice 7 :

Soit Π le plan d'équation vectorielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, k, m \in \mathbb{R}$.

Décrivez et illustrez (sans les axes de coordonnées) le sous-ensemble du plan Correspondant à chacune des données suivantes.

a) $k = 0\ et\ m = 1$

c) $m = 0\ et -1 \leq k \leq 1$

b) $k = 1\ et\ m \in \mathbb{R}$

d) $0 \leq m \leq 1 \;\; et \;\; 0 \leq k \leq 2$

Solutions Géométrie vectorielle Série 5

Exercice 1

a) A $\notin \Pi$ B $\in \Pi$

b) Par exemple :

- Posons $x = 1$ et $y = 0$, on calcule z: C(1 ;0 ;-1) $\in \Pi$
- Posons $x = 1$ et $y = 1$, on calcule z: D(1 ;1 ;0) $\in \Pi$
- Posons $x = -2$ et $y = 0$, on calcule z: E(-2 ;0 ;-3) $\in \Pi$

c) Par exemple : Vecteurs directeurs : et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vecteur position : $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - s - t \\ z = -s - 3t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$

Remarque : La représentation paramétrique, vectorielle et cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Exercice 2

a) A $\notin \alpha$ B $\in \alpha$

b) Par exemple : C(3;1;5) et D(1;2;8) $\in \alpha$

c) Par exemple : Vecteurs directeurs : $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vecteur position : $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 3

a)(ABC): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et (PQ): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

le point d'intersection entre le plan et la droite est: $\left(-\frac{15}{13}; \frac{34}{13}; -\frac{45}{13}\right)$

b) (ABC): $x + 2y - 2z - 11 = 0$

c) (DE): $\begin{cases} x = 11 - 8s \\ y = 1 + 2s \\ 1 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

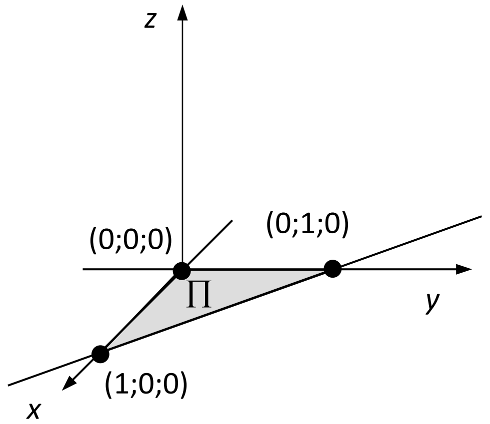
Exercice 4

Équations paramétriques de α : $\begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = -k - 3\lambda \\ z = 6k + 5\lambda - 3 \end{cases} \qquad \lambda, k \in \square$

Remarque : La représentation paramétrique et cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Exercice 5

Exemple :

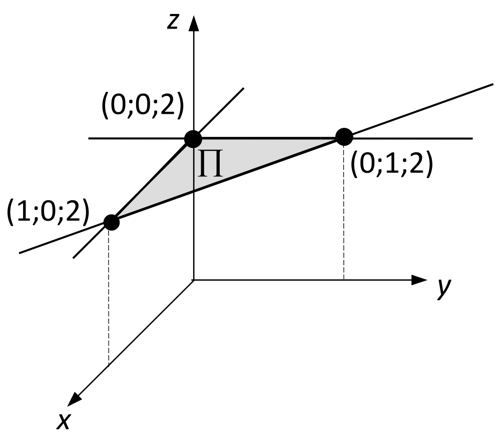


a) $(0;0;0)$, $(1;0;0)$ et $(0;1;0)$ $\in \Pi$

- Équation paramétrique de Π :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}$$

- Remarque : $\Pi \subset plan\,Oxy$

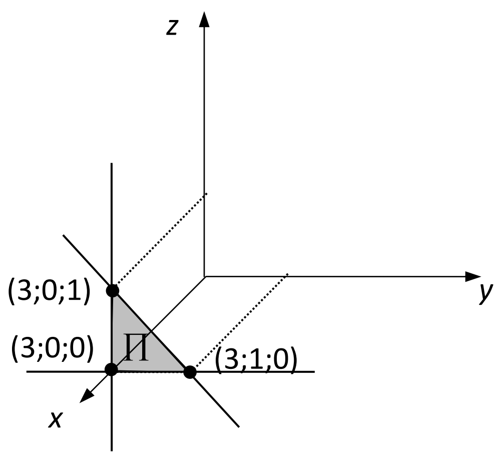


b) $(0;0;2)$, $(1;0;2)$ et $(0;1;2)$ $\in \Pi$

- Équation paramétrique de Π :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}$$

- Remarque : $\Pi \ // \ plan\,Oxy$

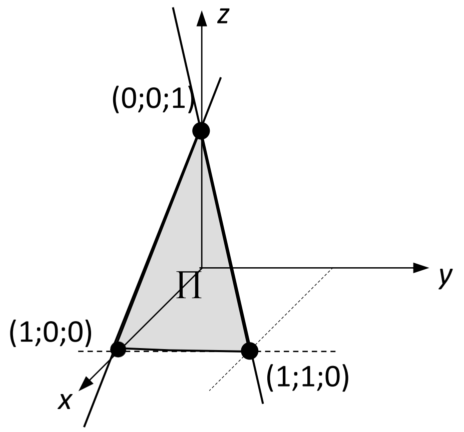
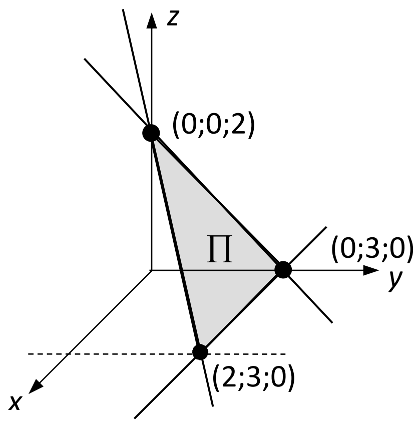


c) $(3;0;0)$, $(3;1;0)$ et $(3;0;1)$ $\in \Pi$

- Équation paramétrique de Π :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}$$

- Remarque : $\Pi \ // \ plan\,Oyz$

	**d)** $(1;0;0)$, $(1;1;0)$ et $(0;0;1)$ $\in \Pi$ • Équation paramétrique de $\prod$ *:* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, s, $t \in \mathbb{R}$
	**e)** $(2;3;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$ $\in \Pi$ • Équation paramétrique de $\prod$ *:* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, s, $t \in \mathbb{R}$

Exercice 6:

a) $k = -\frac{8}{9}$ donc $\left(\frac{4}{9}; \frac{8}{3}; \frac{35}{9}\right)$ b) $k = -1$ $(1; 2; 5)$

c) d: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ on trouve $t = \frac{1}{2}$ donc le point cherché est: $(0; 1; 2)$

Exercice 7:

a) A(1 ;2 ;-1) est *un point* appartenant au plan Π.

b) C' est l'équation *d'une droite* appartenant au plan Π de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de vecteur position $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) C'est l'équation *d'un segment de droite* d'extrémité A(11 ;-9 ;7) et B(-3 ;5 ;-1) appartenant au plan Π .

d) C'est *un plan* limité par les points : A(4 ;-2 ;3) , B(1 ;2 ;-1) , C(-10 ;12 ;-5) et D(-13 ;16 ;-9).