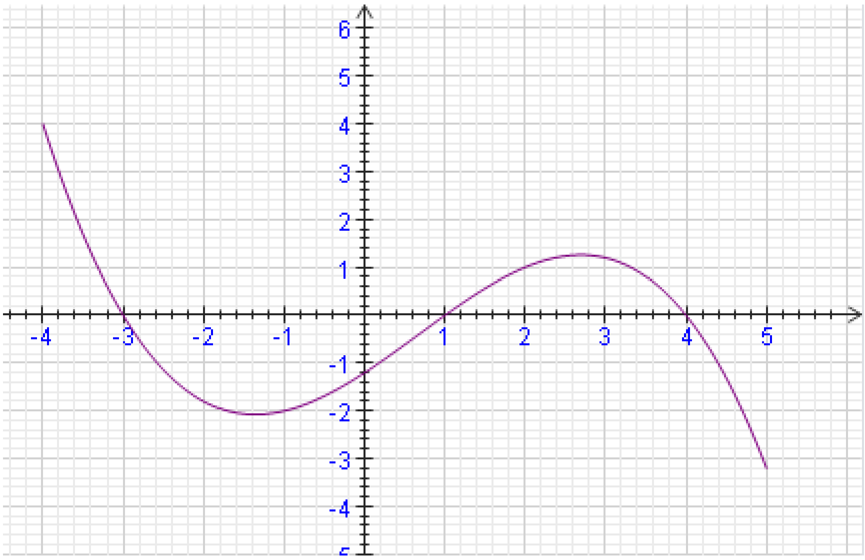
Analyse Série 1 :

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1 : En observant le graphique ci-dessous, déterminer le plus précisément possible :

1) L'image de 2 par f
2) $f(-1)$
3) La source ou le domaine de définition de f
4) Un nombre dont l'image de f est 1
5) Les préimages de 1 par f
6) $f(0)$
7) Les zéros de f
8) Tous les nombres qui ont une image positive
9) Tous les nombres dont l'image est supérieure à 2
10) Les signes de f



Exercice 2 : Répondre aux questions pour les deux fonctions suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - x - 2 \end{cases} \qquad g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(2x-1) \end{cases}$$

1) Représenter f et g sur un même graphique.
2) Calculer les zéros de f et g.
3) Quel est le sommet de la parabole f (Justifier par calcul)
4) Calculer les préimages de 10 par f et par g.
5) Calculer $f \cap g$.

Exercice 3 : Déterminer le domaine de définition (la plus grande source possible) des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{x}{3-x} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4 \qquad h(x) = \sqrt{x+3}$$

Exercice 4 :

Soit $f(x) = \begin{cases} x - 4, si\ x < -2 \\ 2 - x^2, si -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, si\ x > 1 \end{cases}$

1) Représentez f.
2) Calculez les zéros de f
3) Elaborez le tableau des signes de f.

Exercice 5 : On considère des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1) Effectuez les opérations :

$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$	$(f\cdot g)(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(g\circ f)(x)$
$2x+3$	x^2				
$-2x^2$	$\frac{1}{2}x+3$				
$\sqrt{x^2+1}$	$x+3$				
x^2+x	$1-x$				
$-x^3$	x^3+1				
$-x^2+1$	$2x-1$				

2) Décomposez les fonctions : *(astuce : faire comme à la calculatrice)*

$(g\circ f)(x)$	$f(x)$	$g(x)$
$2x-6$		
$2(x-3)$		
$(x-2)^2$		
x^2-2		
$-2x^2$		
$-2(x+1)^2$		
$(x+2)^2+1$		
$(x-2)^2-3$		

Exercice 6 :

Effectuez les 16 compositions possibles à l'aide des 4 applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$f(x)=x-4$ $\qquad g(x)=6x-10$ $\qquad h(x)=x^2-4$ $\qquad m(x)=\dfrac{3x-2}{6}$

Exercice 7 :

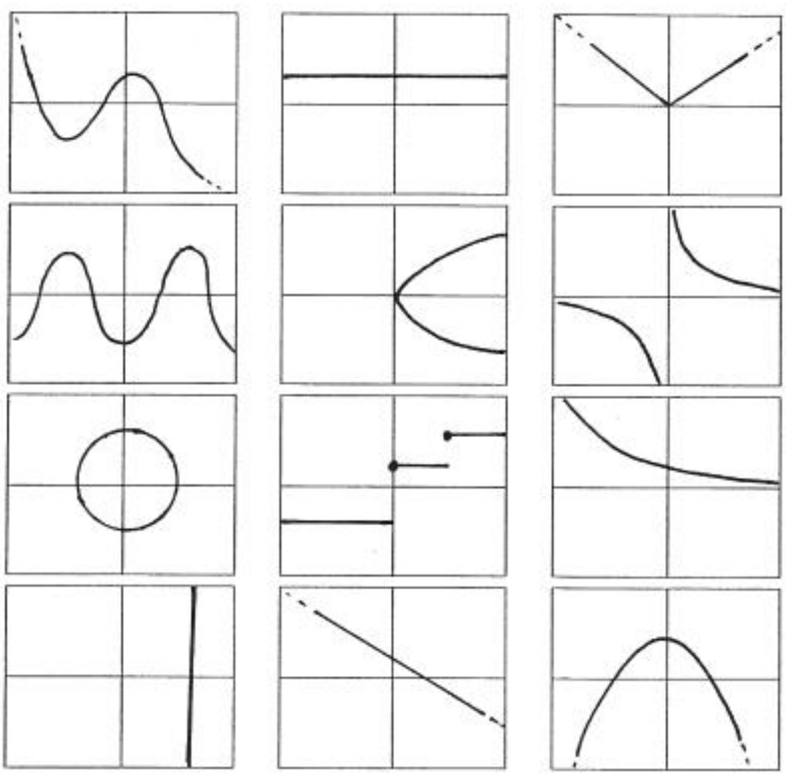
a) Soient $f: x \mapsto 2x - 1$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$; $g: x \mapsto -3x + 2$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$
et $h: x \mapsto 5x$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
Calculer $f \circ (g \circ h)$, puis $(f \circ g) \circ h$.

b) Même question avec :
$f: x \mapsto 2x - 1$de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $g: x \mapsto x^2 - 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h: x \mapsto \frac{x+1}{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

c) Que constate-t-on ?

Exercice 8 :

1) Déterminer si les graphiques ci-dessous représentent des applications, des injections, des surjections ou des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Justifiez les réponses.



2) Déterminez **par calcul** si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

a) $f: x \mapsto 3x + 5$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

b) $f: x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

c) $f: x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

d) $f: x \mapsto \frac{2}{1-x}$ de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

e) $f: x \mapsto -3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

f) $f: x \mapsto 2x^2 + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

g) $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

h) $f: x \mapsto \frac{10}{x^2+10}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Corrigé Analyse Série 1

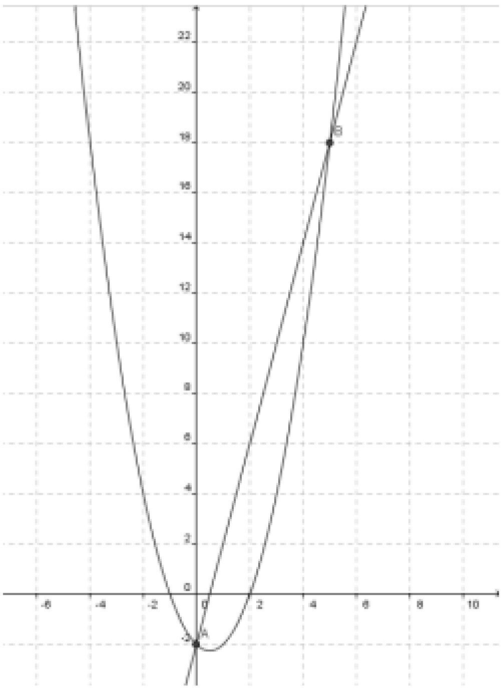
Exercice 1 :

1) $f(2) = 1$
2) $f(-1) = -2$
3) $D = [-4; 5]$
4) $f(x) = 1 \;\; x \in \{-3{,}3; 2; 3{,}4\}$
5) $f^{-1}(1) = \{-3{,}3; 2; 3{,}4\}$
6) $f(0) = -1{,}2$
7) $Z_f = \{-3; 1; 4\}$
8) $f > 0 \; si \; x \in [-4; -3[\cup]1; 4[$
9) $f > 2 \; si \; x \in [-4; -3{,}6[$

x	$[-4;-3[$	-3	$]-3;1[$	1	$]1;4[$	4	$]4;5]$
f	+	0	-	0	+	0	-

Exercice 2 :

1)



2) $Z_f = \{-1; 2\} \quad Z_g = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3) Sommet : $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ ou moyenne entre les zéros : $\frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$

et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{4}$ le sommet est donc : $S\left(\frac{1}{2}; \frac{-9}{4}\right)$

4) Résoudre $f(x) = 10$

$$x^2 - x - 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow soit\ x = -3\ soit\ x = 4$$

donc $f(-3) = f(4) = 10$ donc $f^{-1}(10) = \{-3; 4\}$

résoudre $g(x) = 10$

$2(2x-1) = 10 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

donc $g(3) = 10$ donc $g^{-1}(10) = 3$

5) Résoudre $f(x) = g(x)$

$$x^2 - x - 2 = 2(2x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow soit\ x = 0\ soit\ x = 5$$

$f(0) = g(0) = -2$ donc $A(0; -2)$

et $g(5) = f(5) = 18$ donc $B(5; 18)$

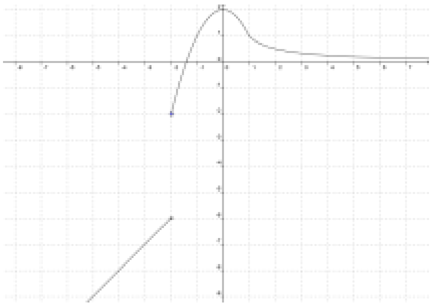
ainsi: $f \cap g = \{(0; -2); (5; 18)\}$

Exercice 3 :

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ $D_g = \mathbb{R}$ $D_h = [-3; +\infty[$

Exercice 4 :

1)



2) $Z_f = \{-\sqrt{2}\}$

x		$-\sqrt{2}$	
f	-	0	+

Exercice 5 :

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{g(x)}$	$\boldsymbol{(f+g)(x)}$	$\boldsymbol{(f \cdot g)(x)}$	$\boldsymbol{(f \circ g)(x)}$	$\boldsymbol{(g \circ f)(x)}$
$2x+3$	x^2	x^2+2x+3	$x^2(2x+3)$	$2x^2+3$	$(2x+3)^2$
$-2x^2$	$\frac{1}{2}x+3$	$-2x^2+\frac{1}{2}x+3$	$-2x^2\left(\frac{1}{2}x+3\right)$	$-2\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2$	$-x^2+3$
$\sqrt{x^2+1}$	$x+3$	$\sqrt{x^2+1}+x+3$	$\sqrt{x^2+1}(x+3)$	$\sqrt{x^2+6x+10}$	$\sqrt{x^2+1}+3$
x^2+x	$1-x$	x^2+1	$(x^2+x)(1-x)$	$(1-x)(2-x)$	$-x^2-x+1$
$-x^3$	x^3+1	1	$-x^3(x^3+1)$	$-(x^3+1)^3$	$-x^9+1$
$-x^2+1$	$2x-1$	$-x^2+2x$	$(-x^2+1)(2x-1)$	$-4x^2+4x$	$-2x^2+1$

$\boldsymbol{(g \circ f)(x)}$	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{g(x)}$	**Vérification :** $\boldsymbol{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$
$2x-6$	$2x$	$x-6$	$g(2x) = 2x-6$
$2(x-3)$	$x-3$	$2x$	$g(x-3) = 2(x-3)$
$(x-2)^2$	$x-2$	x^2	$g(x-2) = (x-2)^2$
x^2-2	x^2	$x-2$	$g(x^2) = x^2-2$
$-2x^2$	x^2	$-2x$	$g(x^2) = -2x^2$
$-2(x+1)^2$	$x+1$	$-2x^2$	$g(x+1) = -2(x+1)^2$
$(x+2)^2+1$	$x+2$	x^2+1	$g(x+2) = (x+2)^2+1$
$(x-2)^2-3$	$x-2$	x^2-3	$g(x-2) = (x-2)^2-3$

Exercice 6 : (les résultats sont à simplifier au maximum, voir factoriser si possible)

	$f(x) = x - 4$	$g(x) = 6x - 10$	$h(x) = x^2 - 4$	$m(x) = \frac{3x-2}{6}$
$f(x)$	$(f \circ f)(x) = x - 8$	$(f \circ g)(x) = 6x - 14$	$x^2 - 8$	$\frac{3x-26}{6}$
$g(x)$	$(g \circ f)(x) = 6x - 34$	$36x - 70$	$6(x^2-4) - 10$	$6\left(\frac{3x-2}{6}\right) - 10$
$h(x)$	$(x-4)^2 - 4$	$(6x-10)^2 - 4$	$(x^2-4)^2 - 4$	$6 \cdot \left(\frac{3x-2}{6}\right)^2 - 4$
$m(x)$	$\frac{3(x-4)-2}{6}$	$\frac{3(6x-10)-2}{6}$	$\frac{3(x^2-4)-2}{6}$	$\frac{3\left(\frac{3x-2}{6}\right)-2}{6}$

Exercice 7 :

a) $\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = -30x + 3$ $\quad$ $((f \circ g) \circ h)(x) = -30x + 3$

b) $\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = \frac{-x^2+4x+2}{x^2}$ $\quad$ $(f \circ g) \circ h)(x) = \frac{-x^2+4x+2}{x^2}$

c) la composition est associative

Exercice 8 :

1) Numérotation des graphiques de 1 à 12.

Injectif	Surjectif	Bijectif	Rien
6, 9, 11	1, 11	11	2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12

2)

Injectif	Surjectif	Bijectif	Rien
a, g, d	a, c, g	a,g,	b, e, f, h