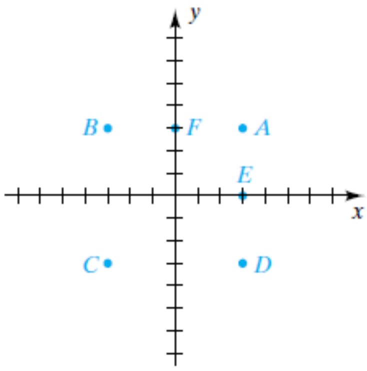
Analyse : Série 1

Exercice 1 : Reporter les points $A(5;-2), B(-5;-2), C(5;2), D(-5;2), E(3;0)$ et $F(0;3)$ dans un plan de coordonnées.

Exercice 2 : Donner les coordonnées des points A à F



Exercice 3 : On considère la fonction définie par $f: x \mapsto (x-1)(x-2)$

1) Quelle est l'ordonnée à l'origine de f ?
2) Déterminer le(s) zéro(s) de la fonction f
3) Déterminer l'image de -1
4) Déterminer le domaine de définition de f.

Exercice 4 : On considère la fonction définie par $f: x \mapsto -3x-3$

a) Quelle est l'image de 2 ?
b) Y a-t-il une préimage de 2 ?
c) Quelle est la valeur de $f(x)$ en -1 ?
d) Y a-t-il des préimages de -2 ?

Exercice 5 : Déterminer les domaines de définition des fonctions données comme suit.

a) $f: x \mapsto 3x^2+1$
b) $f(x) = \frac{2}{x}$
c) $f(x) = \frac{3}{x+7}$

Exercice 6 : Représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous pour $x \in [-5;5]$

a) $f(x) = 2$
b) $f(x) = x$

Exercice 7 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-3}$

a) Déterminer son domaine de définition
b) Calculer l'image de 7
c) Calculer $f(-10)$
d) Quelle est l'image de 14 ?

Exercice 8 : Soit la fonction f définie par $f: x \mapsto 4x-7$

a) Déterminer son domaine de définition
b) Calculer l'image de -3
c) Calculer $f(-1)$
d) Calculer toutes les préimages de 7
e) Déterminer les valeurs de x tel que $f(x) = -11$

Exercice 9 : Soit la fonction f définie par $f: x \mapsto 3x^2 + x - 1$

a) Déterminer son domaine de définition
b) Calculer $f(-10)$
c) Déterminer les valeurs de x tels que $f(x) = -2$
d) Calculer l'image de 4
e) Calculer toutes les préimages de -1

Exercice 10 : Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$

a) Déterminer son domaine de définition
b) Calculer l'image de 0
c) Calculer $f(-1)$
d) Quelle est l'image de 2

Exercice 11 :

Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2-x}$

Exercice 12 :

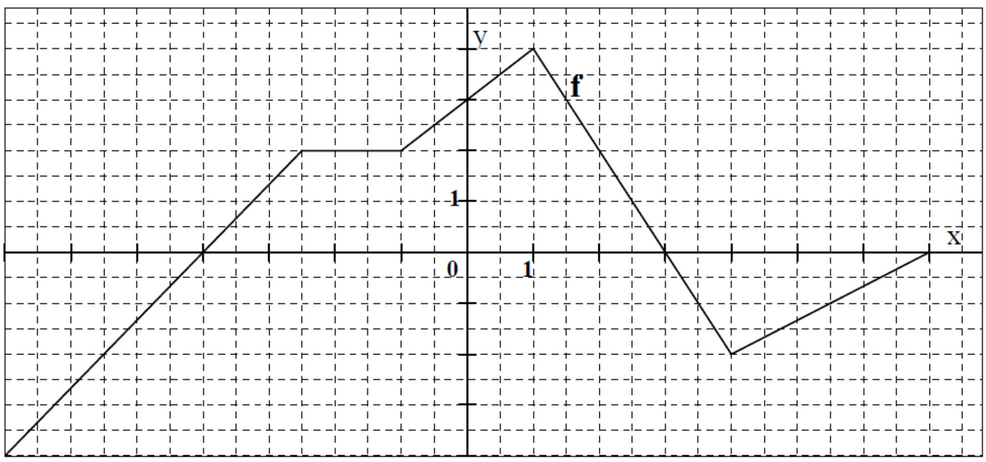
On appelle zéros d'une fonction f les valeurs de x telles que $f(x) = 0$.

Déterminer les zéros des fonctions données ci-dessous :

a) $f: x \mapsto x + 3$
b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = x^3 - 4x$
d) $f: x \mapsto 5 - 3x$
e) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$
f) $f: x \mapsto 7$

Exercice 13 :

a) Le graphe ci-dessous est celui d'une fonction. Imaginez un phénomène que cette fonction pourrait décrire.
b) D'après la représentation graphique de f, déterminez :
   - Les images de -6, -4, -2, 0, 2, 4 et 5,5 par la fonction f.
   - Les préimages de -2, 0, 2, 3, 4 et 4,5 par la fonction f.
   - Les zéros de f et son ordonnée à l'origine.



Exercice 14 :

Esquisser pour $x \in [-3; 3]$ le graphe de la fonction f définie par $f(x) = x^2$

Exercice 15 :

Esquisser pour $x \in [-7; 10]$ le graphe d'une fonction f qui satisfait sur cet intervalle aux conditions suivantes :

a) $f(-1) = 4$

b) -2 et 3 sont les seules préimages de 5

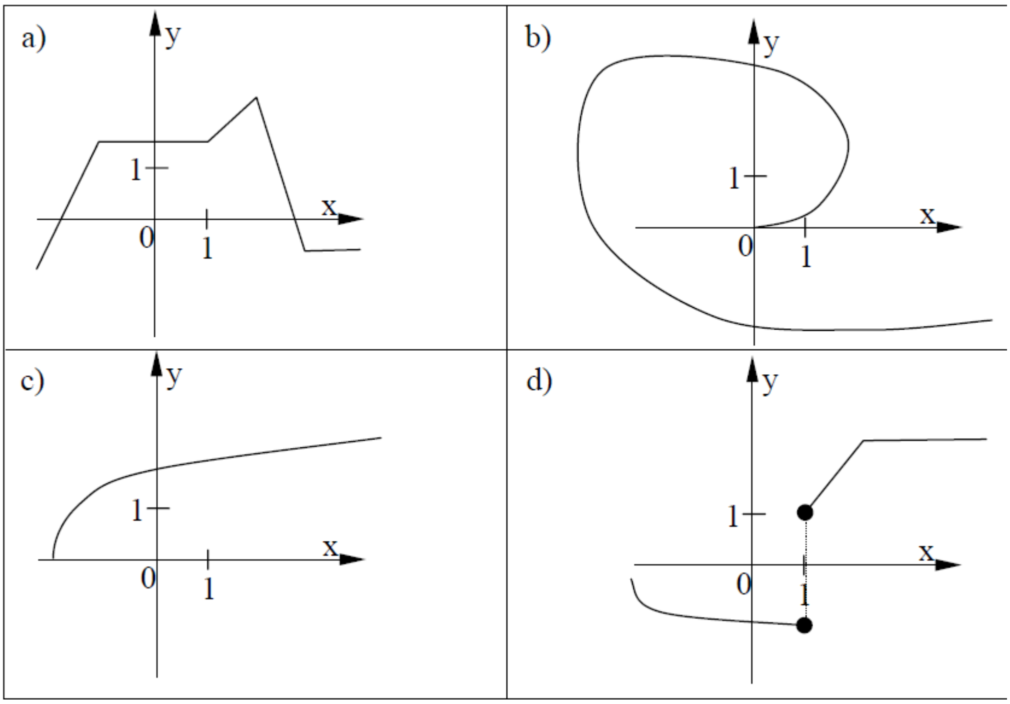
c) Les zéros de f sont -6 et 8

d) f est définie partout sauf en $x = 0$ et $x = 1$

e) 2 possède exactement trois préimages

f) -1 ne possède pas de préimage

Exercice 16 : Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives d'une fonction réelle ?



Exercice 17 :

Identifiez le graphique qui représente chacune des fonctions suivantes :

1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{array}$

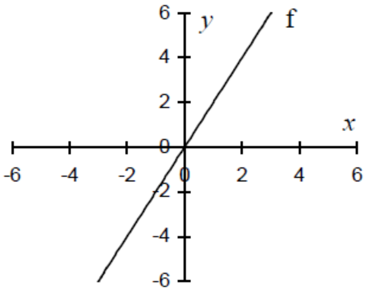
2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array}$

3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + \frac{3}{4}x - \pi \end{array}$

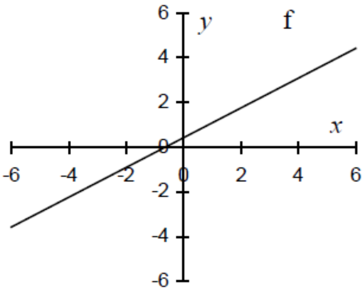
4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2}{3}x + \frac{3}{7} \end{array}$

5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$

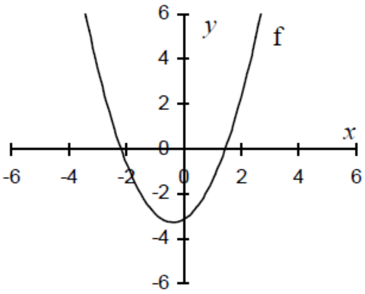
Graphique a)



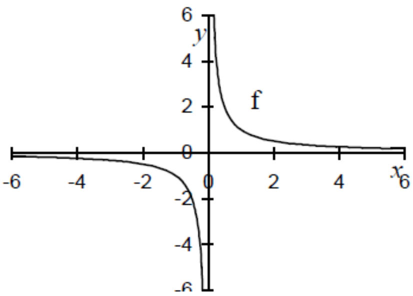
Graphique b)



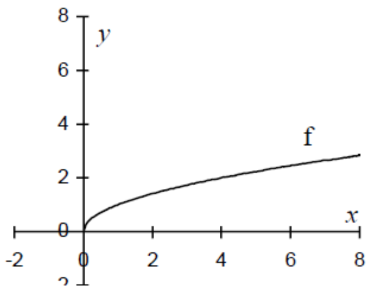
Graphique c)



Graphique d)



Graphique e)



Exercice 18 :

Représentez graphiquement une fonction f ayant simultanément toutes les propriétés suivantes :

- L'image de 1 vaut 2.
- $f(-2) = 1$
- $f(-3) = 0$
- L'image de 6 vaut 0.
- -3 ne possède qu'une seule préimage qui est 5
- -1 possède 3 préimages qui sont : $-5, 0$ et 7.

Exercice 19 :

Voici les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

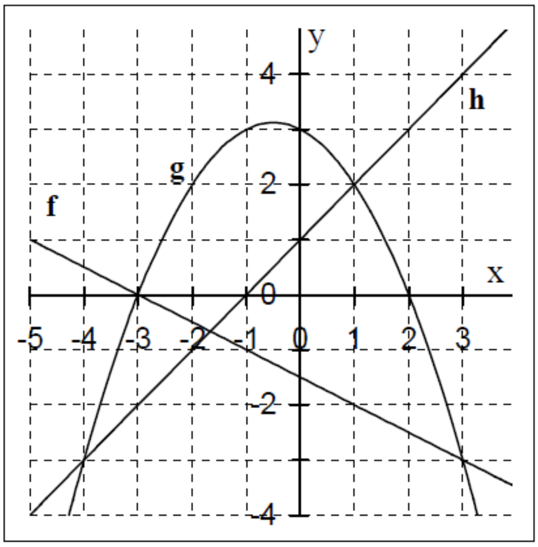
a) Lecture d'**image** : Déterminez à partir de ces graphiques :

$$f(1), f(-2), f(0), g(1), g(-2), g(0), h(1), g(-2), h(0)$$

b) **Vrai ou faux ?** « Le point $(-49; -48)$ appartient à la courbe représentative de h »

c) Lecture de préimages : Complétez :

- Si $f(x) = -3, alors\ x =$
- Si $g(x) = 3, alors\ x =$
- Si $h(x) = 0, alors\ x =$
- Si $f(x) = h(x), alors\ x =$
- Si $f(x) = g(2), alors\ x =$
- Si $g(x) = g(x+1), alors\ x =$
- Si $f(x) = h(-3), alors\ x =$
- Si $g(x) > f(x), alors\ x =$
- Si $f(x) = h(x), alors\ x =$



d) Quel est l'ensemble des zéros de f, g et h ?

Exercice 20 :

Parmi les fonctions ci-dessous, laquelle a un graphe passant par le point $(2; -3)$?

a) $f(x) = 2x - 3$
b) $g(x) = -3x + 2$
c) $h(x) = 4(x+2) + 3$
d) $j(x) = 2(x-1) - 5$

Exercice 21 :

Pour chaque fonction, déterminez : $D_f, Z_f, f(0)$

a) $f(x) = 3x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 9$
c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
d) $f(x) = \sqrt{x}$
e) $f(x) = \sqrt{x+5}$
f) $f(x) = \sqrt{7 - 2x}$
g) $f(x) = \frac{5}{x+3}$
h) $f(x) = \frac{5}{x^2+x-12}$
i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
j) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$
k) $f(x) = \sqrt{x^2}$
l) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$
m) $f(x) = \sqrt{(x-4)(5-x)}$

Corrigé Fonctions Série 1

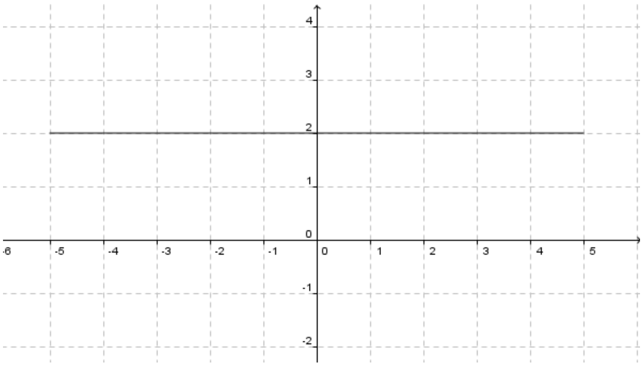
Exercice 3 : 1) $f(0) = 2$
2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \; ou \; x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = 2 \; Z_f = \{1; 2\}$
3) $f(-1) = 6$ 4) $D_f = \mathbb{R}$

Exercice 4 :
a) $f(2) = -9$ b) $-3x-3 = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$ c) $f(-1) = 0$ d) $f(x) = -2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

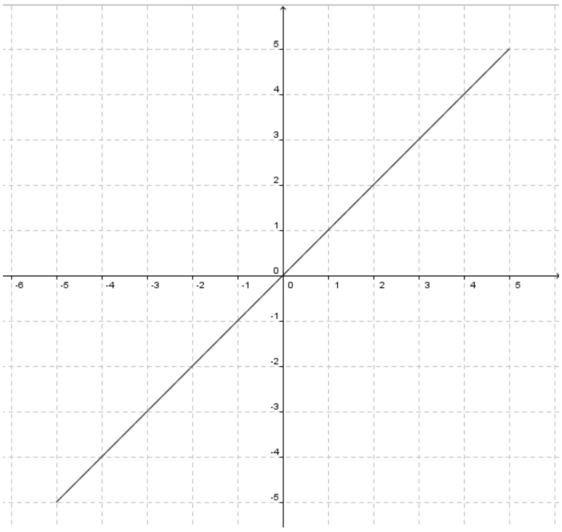
Exercice 5 : a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $D_f = \mathbb{R}^*$ c) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-7\}$

Exercice 6 :

a)



b)



Exercice 7 : a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$ b) $f(7) = \frac{1}{4}$ c) $f(-10) = \frac{1}{-13}$ d) $f(14) = \frac{1}{11}$

Exercice 8 : a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $f(-3) = -19$ c) $f(-1) = -11$ d) $4x-7 = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$
e) $4x-7 = -11 \Leftrightarrow x = -1$

Exercice 9 : a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $f(-10) = 289$
c) $3x^2 + x - 1 = -2 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 1 = 0$ impossible: patience, la méthode de résolution arrive au 2e semestre d) $f(4) = 51$
e) $3x^2 + x - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; 3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = -\frac{1}{3}$

Exercice 10 : a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$ b) $f(0) = -\frac{1}{4}$ c) $f(-1) = 0$ d) impossible à cause du D_f

Exercice 11 : $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x$ donc $D_f =]-\infty; 2]$

Exercice 12 : a) $x + 3 = 0$ donc $x = -3$ $Z_f = \{-3\}$
b) $x^2 + 1 = 0$ impossible à factoriser donc pas de zéro: $Z_f = \emptyset$
c) $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 2 \; ou \; x = -2$ $Z_f = \{-2; 0; 2\}$
d) $Z_f = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ e) $2x`2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \; ou \; x = -\frac{1}{2}$ $Z_f = \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$ f) $Z_f = \emptyset$

Exercice 13 :

Cette courbe pourrait représenter la hauteur en mètres, d'un niveau d'eau, relativement à une référence, au cours du temps.

$f(-6) = -2,666...$ car la pente de la droite à cet endroit est de 4 / 3.

$f(-4) = 0$ $f(-2) = 2$ $f(0) = 3$ $f(2) = 2$

$f(4) = -2$ $f(5,5) = -1$

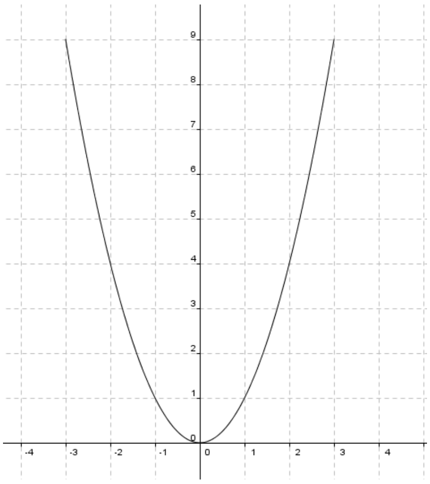
$f^{-1}(-2) = \{-5,5 ; 4\}$ $f^{-1}(0) = \{-4 ; 3\}$ $f^{-1}(2) = [-2,5 ; -1] \cup \{2\}$

$f^{-1}(3) = \{0 ; 1,5\}$ $f^{-1}(4) = \{1\}$ $f^{-1}(4,5) = \varnothing = \{ \}$ = l'ensemble vide.

Zéros(f) = $f^{-1}(0) = \{-4 ; 3\}$

L'ordonnée à l'origine = $f(0) = 3$

Exercice 14:

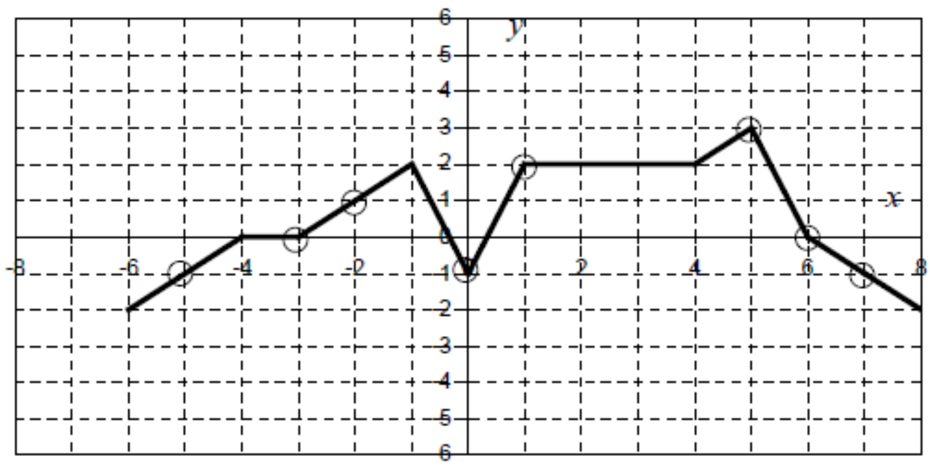


Exercice 16 :

Les courbes a), c) et d) sont représentatives d'une fonction réelle. La courbe b) ne l'est pas, cas il y a un nombre (même plusieurs) qui ont plus d'une image.

Exercice 18 :

Des cercles ont été mis aux endroits imposés par l'énoncé.



Exercice 19 :

V.11 $f(1) = -2$ $f(-2) = -0,5$ $f(0) = -1,5$
$g(1) = 2$ $g(-2) = 2$ $g(0) = 3$
$h(1) = 2$ $h(-2) = -1$ $h(0) = 1$

b) Il semble raisonnable de penser que $h(x) = x+1$ en voyant le graphique. Dans ce cas, en remplaçant x par -49, son image par h égale bien -48, puisque -48 = -49 + 1. Donc l'affirmation est vraie. Mais si on ne peut pas être sûr de cette réponse, car on n'est pas sur de la définition de la fonction h pour des valeurs hors de l'intervalle [-5 ; 4]. Il n'y a pas de réponse correcte sans justifier cette réponse.

c) $f^{-1}(-3) = \{3\}$ $g^{-1}(3) = \{-1 ; 0\}$ $h^{-1}(0) = \{-1\}$ vous pouvez aussi écrire :
$f(x) = -3 \Rightarrow x = 3$ $g(x) = 3 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 0$ $h(x) = 0 \Rightarrow x = -1$
$f(x) = g(2) = 0 \Rightarrow x = -3$ $f(x) = h(-3) = -2 \Rightarrow x = 1$
$g(x) = h(x) \Rightarrow x = -4$ ou $x = 1$ $g(x) > f(x) \Rightarrow x \in]-3 ; 3[$
$g(x) = g(x+1) \Rightarrow x = -1$
$f(x) = h(x) \Rightarrow -0,5 \cdot x - 1,5 = x + 1 \Rightarrow -2,5 = 1,5 \cdot x \Rightarrow x = -2,5 / 1,5 = -5 / 3 = 0,6666...$

d) Zéros(f) = {-3}; Zéros(g) = {-3 ; 2}; Zéros(h) = {-1}
f est positive ou nulle sur l'intervalle $]-\infty ; -3]$
g est négative ou nulle sur $]-\infty ; -3] \cup [2 ; \infty[$
h est strictement positive sur l'intervalle $]-1 ; \infty[$

Exercice 20 :

Il faut vérifier si $f(2) = -3$. a) Non b) non c) non d) oui

Exercice 21 :

a)	Dom(f) = $\mathbb{R}$	Zéros(f) = {-2 / 3}	$f(0) = 2$
b)	Dom(f) = $\mathbb{R}$	Zéros(f) = {-3 ; 3}	$f(0) = -9$
c)	Dom(f) = $\mathbb{R}$	Zéros(f) = {0 ; 1} car $f(x) = x \cdot (x - 1)^2$	$f(0) = 0$
d)	Dom(f) = $\mathbb{R}_+$	Zéros(f) = {0}	$f(0) = 0$
e)	Dom(f) = $[-5 ; \infty[$	Zéros(f) = {-5}	$f(0) = \sqrt{5}$
f)	Dom(f) = $]-\infty ; 7/2]$	Zéros(f) = {7 / 2}	$f(0) = \sqrt{7}$
g)	Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$	Zéros(f) = $\varnothing$	$f(0) = 5 / 3$
h)	$f(x) = 5 / [(x - 3) \cdot (x + 4)]$, donc il y a division par zéro si $x = 3$ et si $x = -4$		
	Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{-4 ; 3\}$	Zéros(f) = $\varnothing$	$f(0) = -5 / 12$
i)	Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$	Zéros(f) = {0}	$f(0) = 0$
j)	Dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$	Zéros(f) = $\varnothing$ (2 n'est pas dans Dom(f) !)	$f(0) = 1 / 2$
k)	Dom(f) = $\mathbb{R}$	Zéros(f) = {0}	$f(0) = 0$
l)	Dom(f) = $\mathbb{R}_+$	Zéros(f) = {0}	$f(0) = 0$
m)	Dom(f) = [4 ; 5]	Zéros(f) = {4 ; 5}	$f(0)$ n'existe pas, car $0 \notin$ Dom(f)