Analyse Série 3

Exercice 1 : Soient les fonctions suivantes :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x+1 \end{cases} \qquad g:\begin{cases} \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}_-^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad h:\begin{cases} \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

1) Calculer $f \circ g$; $h \circ g$ et $f \circ h$
2) Calculer les réciproques des bijections f ; g et h
3) Calculer $f \circ^r f$ et $g \circ^r g$ puis commenter ces résultats
4) Calculer $f \circ (h \circ g)$ et $(f \circ h) \circ g$.

Exercice 2 : Notons

$T_a(x) = x + a$ $\qquad H_b(x) = b \cdot x$ $\qquad C(x) = x^2$

Ces trois fonctions sont définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1) Calculer $H_{1/2} \circ C \circ T_{-2}$; $H_3 \circ C \circ C \circ T_1$ et $T_{-4} \circ C \circ C$
2) Les fonctions suivantes ont été composées à l'aide des fonctions T_a; H_b et C.

   Retrouver ces compositions.

   $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$ $\qquad g(x) = \frac{x^2+2}{3}$ $\qquad h(x) = 2(x^2-3)^2 + 1$

3) Représenter sur un même graphique :

   a) $C; T_2 \circ C$ et $C \circ T_2$

   b) $C; T_{-3} \circ C$ et $C \circ T_{-3}$

Exercice 3 : Notons :

$T_a(x) = x + a$ $\qquad V(x) = |x|$ $\qquad R(x) = \sqrt{x}$

$C(x) = x^2$ $\qquad H_b(x) = b \cdot x$ $\qquad J(x) = \dfrac{1}{x}$

1) Effectuer les compositions suivantes :

$f(x) = H_3 \circ R \circ T_{-2} \circ J \circ H_5 \circ C$

$g(x) = H_3 \circ J \circ R \circ V \circ T_{-4} \circ H_2 \circ C$

2) Décomposer les fonctions données :

$h(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{3}}$ $\qquad i(x) = 2(x^2-3)^2 + 1$

$j(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Solutions Analyse Série 3 :

Ex 1 :

1) $(f \circ g)(x) = \frac{-2+x}{x}$; $(h \circ g)(x) = \frac{1}{x^2}$ et $(f \circ h)(x) = -2x^2 + 1$
2) ${}^r f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; ${}^r g(x) = \frac{1}{x}$ et ${}^r h(x) = -\sqrt{x}$
3) $(f \circ^r f)(x) = x$ et $(g \circ^r g)(x) = x$ on retrouve l'identité
4) $[f \circ (h \circ g)](x) = -\frac{2}{x^2} + 1$ et $[(f \circ h) \circ g](x) = -\frac{2}{x^2} + 1$ composition associative

Ex 2 :

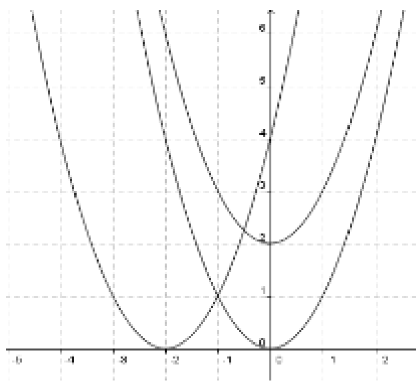
$T_a(x) = x + a$ donc $T_1(x) = x + 1$et $T_{-4}(x) = x - 4$, etc.

$H_b(x) = b \cdot x$ donc $H_3(x) = 3x; H_2(x) = 2x, etc.$

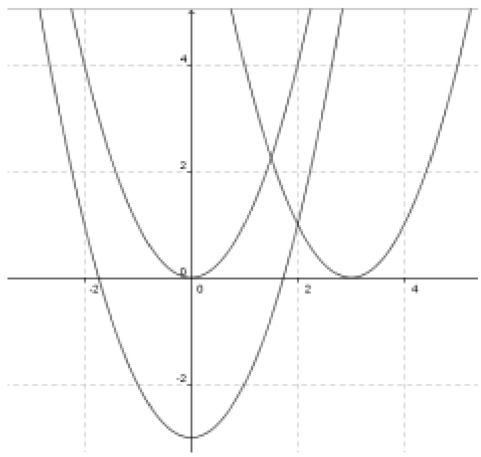
$C(x) = x^2$

1) $\left(H_{\frac{1}{2}} \circ C \circ T_{-2}\right)(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$; $(H_3 \circ C \circ C \circ T_1)(x) = 3(x+1)^4$

   et $(T_{-4} \circ C \circ C)(x) = x^4 - 4$
2) $f(x) = (T_1 \circ H_3 \circ C \circ T_{-2})(x)$; $g(x) = (H_{\frac{1}{3}} \circ T_2 \circ C)(x)$; $h(x) = (T_1 \circ H_2 \circ C \circ T_{-3} \circ C)(x)$
3) a)



b)



Ex 3 :

1) $f(x) = 3\sqrt{\frac{1}{5x^2} - 2}$ $g(x) = \frac{3}{\sqrt{|2x^2-4|}}$

2) $h(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(2x-1)} = \left(R \circ H_{\frac{1}{3}} \circ T_{-1} \circ H_2\right)(x)$

$i(x) = (T_1 \circ H_2 \circ C \circ T_{-3} \circ C)(x)$

$j(x) = \sqrt{-x^2 + 4} = (R \circ T_4 \circ H_{-1} \circ C)(x)$