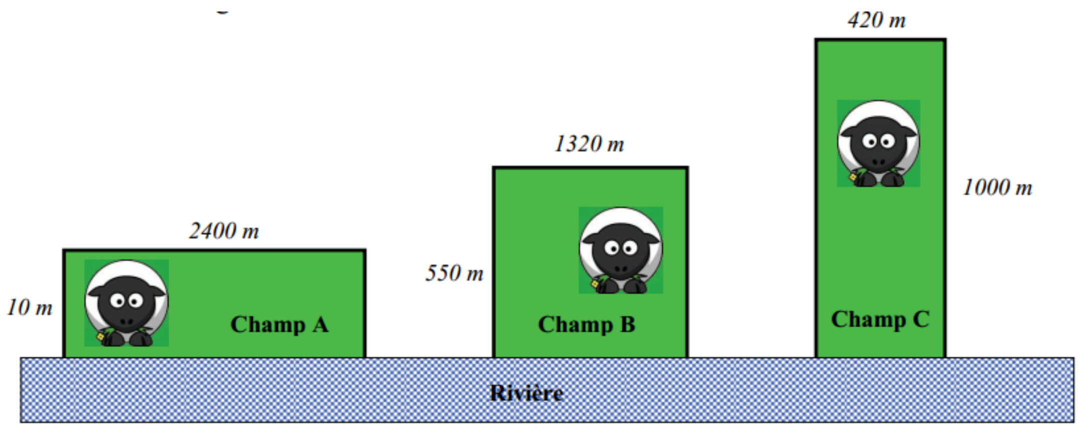
Fonctions Série 4

Exercice 1 :

1. Un fermier désire délimiter une parcelle de terrain pour faire brouter ses moutons. Il dispose de 2420 mètres de clôture pour construire un enclos rectangulaire le long d'une rivière. Il n'utilise pas de clôture le long de la rivière.

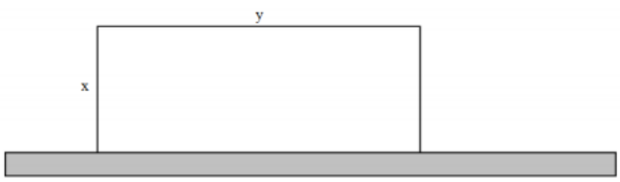


a) Pour chaque champ, calculer la longueur de la clôture et l'aire du champ.
Que constate-t-on ? Quel est, parmi ces trois formes de champs, celui qui permet aux moutons de brouter le plus d'herbe ?

b) Le dessin ci-dessus propose trois configurations différentes. Combien y a-t-il d'autres configurations possibles ?

c) Parmi toutes les configurations possibles, la forme du champ B donne-t-elle l'aire maximale ?

2. Un fermier désire délimiter une parcelle de terrain pour faire brouter ses moutons. Il dispose de 2420 mètres de clôture pour construire un enclos rectangulaire le long d'une rivière. Il n'utilise pas de clôture le long de la rivière. Les dimensions x et y de l'enclos sont exprimées en mètres.



a) Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour x ?

b) Trouver une relation entre x et y, puis exprimer y en fonction de x

c) Déterminer l'aire A de l'enclos en fonction de la longueur x c.à.d. $A = f(x)$

d) Pour quelle valeur de x l'aire A de l'enclos est-elle maximale ?

e) Quelles sont alors les dimensions de l'enclos et son aire maximale ?

Exercice 2 :

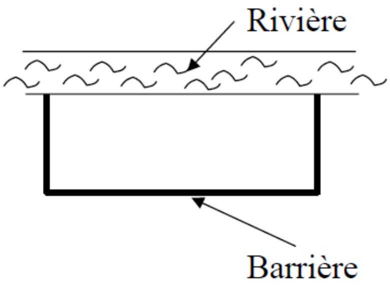
Parmi tous les rectangles ayant un périmètre égal à 24 centimètres, quelles sont les dimensions de ceux qui ont une aire maximale ?

Exercice 3 :

Parmi tous les triangles rectangles tels que la somme de leur deux cathètes vaut 60 centimètres, quelles sont les dimensions de ceux ayant leur hypoténuse la plus courte ?
Remarque : l'hypoténuse H est la plus courte lorsque son carré H^2 est minimal

Exercice 4 :

Un terrain se trouve en bordure d'une rivière rectiligne. On désire délimiter une zone rectangulaire le long de la rivière à l'aide d'une barrière ayant une longueur totale de 120 mètres. Le côté de la zone le long de la rivière n'a pas besoin de barrière. Quelle est l'aire maximale possible de la zone délimitée par la barrière et la rivière ?



Exercice 5 :

Lorsqu'on lance un objet en l'air depuis une hauteur de 1,5 mètres, avec une vitesse initiale de 6 $\left[\frac{m}{s}\right]$, sa hauteur en fonction du temps est : $h(t) = -4{,}9t^2 + 6t + 1{,}5$ (dans les unités MKSA). Dans cet exercice, des réponses avec 3 chiffres significatifs sont suffisantes.

a) Au temps $t = 0\ s$, l'objet se trouve à une hauteur de 1,5 m. Ensuite il monte puis redescend. Après combien de temps l'objet se retrouve-t-il à une hauteur de 1,5 m ?

b) A quels instants l'objet se trouve-t-il à une hauteur de 3,2 mètres ?

c) A quel instant l'objet se trouve-t-il le plus haut et quelle est cette hauteur ? Quelle est cette hauteur maximale ?

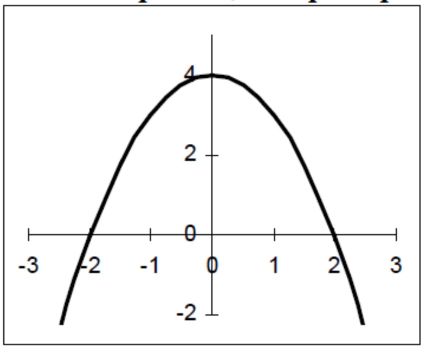
Exercice 6 :

Pour chaque fonction parabolique ci-dessous, indiquez si elle possède un minimum ou un maximum. Déterminer l'ensemble de ses zéros et les coordonnées du minimum ou du maximum.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$
b) $f(x) = x^2 + 4x + 3$
c) $f(x) = x^2 + 8x + 5$
d) $f(x) = x^2 - x - 1$
e) $f(x) = -x^2 + 7x + 3$
f) $f(x) = x^2 - 4x + 6$
g) $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$
h) $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$
i) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$
j) $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$
k) $f(x) = -10x^2 - 7x - 1$
l) $f(x) = 12x^2 - 11x + 5$
m) $f(x) = -30x^2 + 23x - 4$

Exercice 7 :

Dans chaque cas, indiquez quelle est la fonction représentée, et justifiez !

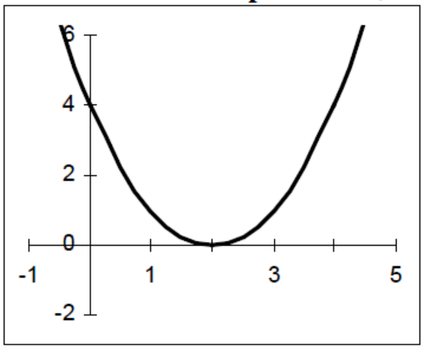


$F_1 : x \mapsto 4x^2$

$F_2 : x \mapsto (2-x)\cdot(2+x)$

$F_3 : x \mapsto -(x-2)^2$

$F_4 : x \mapsto (2-x)^2$

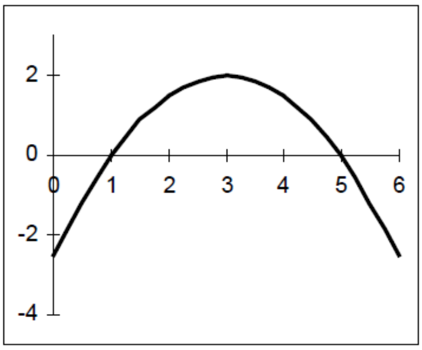


$F_1 : x \mapsto (x-2)^2$

$F_2 : x \mapsto -(x+2)^2$

$F_3 : x \mapsto x^2 - 4$

$F_4 : x \mapsto x^2 + 4$



$F_1 : x \mapsto -(x-1)\cdot(x-5)$

$F_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\cdot(x-3)^2 + 2$

$F_3 : x \mapsto -\frac{1}{2}\cdot(x-3)^2 + 2$

$F_4 : x \mapsto -\frac{1}{2}\cdot(x+3)^2 + 2$

Exercice 8 :

La fonction esquissée ci-contre est la droite $f(x) = 20 - \frac{3}{2}x$

Les sommets du triangle ombré sont $(0;0)$; $(a;0)$ et $(a;f(a))$, a réel positif.

a) Calculer la hauteur du triangle lorsque $a = 1$, $a = 4$, $a = 6$ et $a = 10$

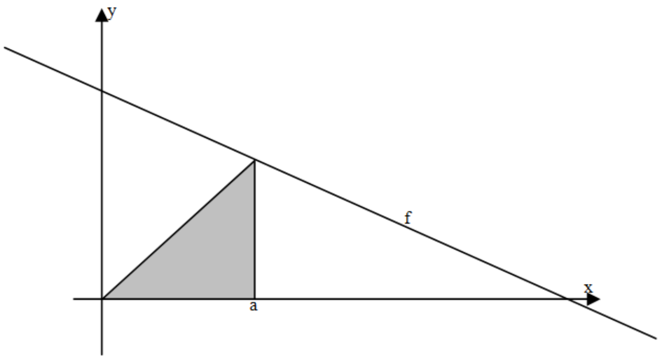
b) Calculer l'aire du triangle lorsque $a = 4$

c) Exprimer l'aire du triangle en fonction de a

d) Pour quelles valeurs de a l'aire du triangle est elle nulle ?

e) Pour quelle valeur de a l'aire est-elle maximale ?

f) Quelle est cette aire maximale ?



Exercice 9 :

Un campeur dispose de 20 mètres de "clôture" pour délimiter son emplacement rectangulaire situé le long d'un mur. Quelle est la superficie de son emplacement lorsqu'il occupe 8m le long du mur ? Lorsqu'il occupe x mètres le long du mur ? Pour quelle valeur de x cette superficie est-elle maximale ?

Exercice 10 :

Lors de la conquête de l'Ouest, un pionnier disposait de 40'000 m de fil pour délimiter sa terre. Quelles dimensions devait-il choisir pour avoir la plus grande superficie sachant que tous les domaines devaient être rectangulaires.

Exercice 11 :

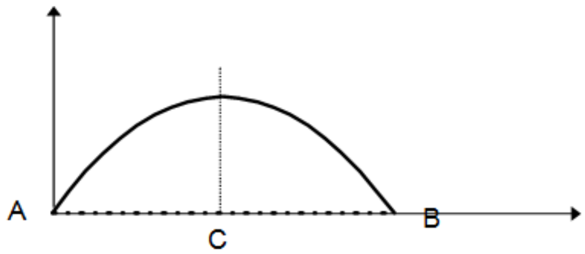
a) Quels sont les 2 nombres dont la somme est 6 et dont le produit est maximal ?
Indication : Écrire la fonction qui associe à x (l'un des deux nombres), le produit des 2 nombres.

b) Quels sont les 2 nombres dont la différence est 6 et dont le produit est minimal ?
Indication : Écrire la fonction qui associe à x (l'un des deux nombres), le produit des 2 nombres.

Exercice 12 : Saut de grenouille.

Une grenouille saute de A vers B; sa trajectoire est une parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + x$

Quelle est la distance entre A et B et quelle est la hauteur maximale atteinte par la grenouille ?



Exercice 13 :

a) La distance d en km que peut parcourir la voiture avec 10 litres d'essence dépend de la vitesse v en km/h
$d = -\frac{1}{20}v^2 + 6v$ et $v \in]20; 130[$
Quelle distance peut-on parcourir à 60 km/h ? A quelle vitesse faut-il rouler pour parcourir la plus grande distance avec 10 litres ?

b) La consommation d'essence (nombre de litres consommés pour parcourir 100 km) dépend de la vitesse $= \frac{1}{500}v^2 - \frac{7}{25}v + 18$ et $v \in]0; 130[$

Que consomme-t-on à 60 km/h ? à 100 km/h ? Quelle est la vitesse la plus économique ?

Exercice 14 :

Un porche a une forme de parabole d'équation $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

a) Quelle est la hauteur du porche ?

b) Une voiture de 2m20 de large et de 1m50 de haut passe-t-elle sous le porche ?

Solutions pour Analyse Série 4

ex 1 1. a) Notons L la longueur de la clôture et A l'aire du champ.

$$L_A = 2420\ m, A_A = 24'000 m^2, L_B = 2420\ m, A_B = 726'000 m^2, L_C = 2420\ m, A_C = 420'000 m^2$$

On constate que l'aire du champ varie en fonction de sa forme et pas de la longueur de la clôture qui est constante. C'est le champ B qui permet aux moutons de brouter le plus d'herbe.
b) Il y a une infinité de configurations possibles
c) Difficile à dire, il faudrait tester toutes les autres possibilités ! Idée: traiter le cas général, voir 2. :

2. a) $x \in]0; 1210[$ **b)** $y = 2420 - 2x$ **c)** $A = -2x^2 + 2420x$ (fonction du 2e degré) **d)** $x = 605\ m$
e) $y = 1210\ m,\ A_{max} = 732'050 m^2$

ex 2: 6x6, A= 36 cm^2

ex 3: triangle isocèle $x = y = 30$

ex 4: maximiser $2x^2 - 120x = y$ on trouve: $x = 30, y = 60, Aire = 1800\ m^2$

Ex 5: a) $t \cong 1{,}22\ s$ b) $t = 0{,}455\ s$ à la montée et $t \cong 0{,}779\ s$ à la descente c) $h_{max} \cong 3{,}34\ m$

Ex 6:

	min ou Max ?	**Sommet**	**Zéros: Z_f**	**$\Delta = b^2 - 4ac$**
a)	Min	$S\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$	$Z_f = \{-2; -1\}$	1
b)	Min	$S(-2; -1)$	$Z_f = \{-3; -1\}$	4
c)	Min	$S(-4; -11)$	$Z_f = \{-4 - \sqrt{11}; -4 + \sqrt{11}\}$	44
d)	Min	$S\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$	$Z_f = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$	5
e)	Max	$S\left(\frac{7}{2}; \frac{61}{4}\right)$	$Z_f = \left\{\frac{7-\sqrt{61}}{2}; \frac{7+\sqrt{61}}{2}\right\}$	61
f)	Min	$S(2; 2)$	$Z_f = \emptyset$	-8
g)	Min	$S\left(-\frac{5}{4}; -\frac{17}{8}\right)$	$Z_f = \left\{\frac{-5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right\}$	17
h)	Max	$S\left(\frac{5}{4}; \frac{1}{8}\right)$	$Z_f = \{1; 1{,}5\}$	1
i)	Min	$S(-1; -1)$	$Z_f = \left\{\frac{-1-\sqrt{2}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right\}$	8
j)	Min	$S\left(-\frac{5}{6}; -\frac{13}{12}\right)$	$Z_f = \left\{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}; \frac{-5+\sqrt{13}}{6}\right\}$	13
k)	Max	$S\left(-\frac{7}{20}; \frac{9}{40}\right)$	$Z_f = \left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right\}$	9
l)	min	$S\left(-\frac{11}{24}; \frac{119}{48}\right)$	$Z_f = \emptyset$	-119
m)	Max	$S\left(\frac{23}{60}; \frac{49}{120}\right)$	$Z_f = \left\{\frac{4}{15}; \frac{1}{2}\right\}$	49

Ex 7: a) F_2 (autrement convexe ou mauvaise ordonnée à l'origine)
b) F_1 (autrement pas de zéro, pas la bonne o à l'o ou pas convexe)
c) F_3 (autrement pas bonnes coordonnées du sommet ou pas bonne o à l'o)