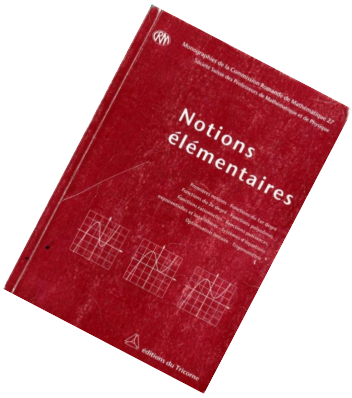
Analyse : Fonctions

Un but de l'analyse est d'approcher l'infiniment grand et l'infiniment petit. Une bonne connaissance des fonctions est nécessaire pour faire cela. C'est la raison pour laquelle ce cours traitera principalement des fonctions.

Nous allons commencer par revoir quelques notions de base concernant les fonctions puis étudier différentes fonctions particulières : premier degré, second degré, racine carrée, inverse, valeur absolue et fonctions définies par morceaux. Ces fonctions seront ensuite très utiles en deuxième, troisième et quatrième année du collège. Le chapitre d'Analyse reviendra chaque année.

Cette année, nous aurons aussi besoin de revoir et d'apprendre plusieurs notions d'algèbre pour étudier au mieux les fonctions mentionnées ci-dessus. Nous ferons donc des liens entre l'analyse et l'algèbre.



Matériel pour ce chapitre :

- Ce polycopié pour la théorie et des exemples
- Les séries intitulées "Fonctions Série ..." et abrégées AS1, AS2, etc.
- Monographie CRM n°27 *Notions élémentaires (en cours)*
- *Formulaires et tables CRM (pour les épreuves)*

0. Introduction

Quelle relation peut-on établir entre les ensembles dans les exemples suivants ? Reliez les éléments

1.

Mandarine Fraise Kiwi Banane Pomme	Rouge Bleu Jaune Orange Vert

2.

Salut Ciao Hi Holà	Espagnol Anglais Italien Français

3.

12 -1 0 -3 -7 4 3	0 49 -1 9 144

Nous utilisons régulièrement des fonctions sans le savoir.

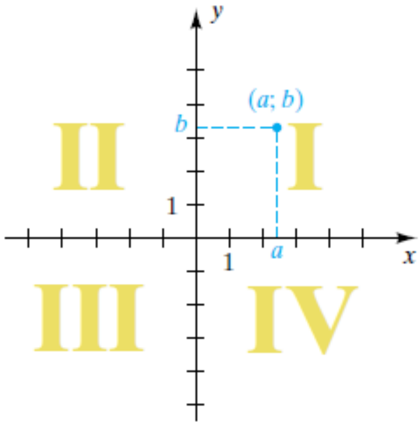
- Un horaire de train donne la position du train *en fonction du* temps.
- La distance parcourue en voiture *en fonction du* temps est un autre exemple de fonction.
- Un thermomètre indique la température *en fonction de* la hauteur de l'alcool dans le tube.
- Un voltmètre analogique indique la tension *en fonction de* la position de l'aiguille.
- Une montre analogique indique l'heure *en fonction de* la position des aiguilles.
- etc.
- Dès que vous apprenez à compter, vous utilisez une *fonction* : celle qui à un nombre entier fait correspondre le nombre entier suivant, c'est-à-dire $f: n \mapsto n+1$ où $n \in \mathbb{N}$. En première primaire, vous apprenez à additionner deux nombres. C'est aussi une *fonction*, qui à deux nombres en fait correspondre un troisième : $g: m;n \mapsto m+n$ où $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Ces exemples montrent que l'on peut trouver des fonctions partout.

1. Notions de base

a) Systèmes de coordonnées cartésiens[1]

Un système de coordonnées rectangulaires ou système cartésien dans un plan est formé de deux droites de coordonnées perpendiculaires appelées axes de coordonnées, qui se coupent à l'origine O :

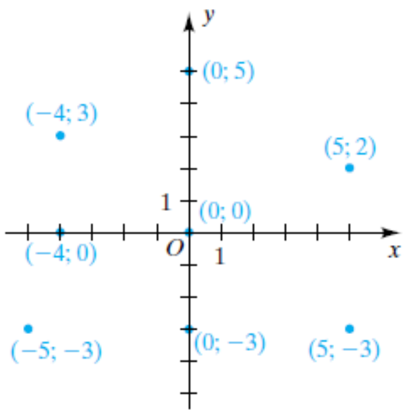


Nous appelons la droite horizontale l'axe des x et la droite verticale l'axe des y et nous les notons respectivement Ox et Oy.
Le plan est alors un plan de coordonnées ou plan Oxy. Les axes de coordonnées divisent le plan en quatre secteurs appelés le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième quadrant, et notés respectivement I, II, III et IV. Les points sur les axes n'appartiennent à aucun quadrant.

b) Coordonnées d'un point

Chaque point P d'un plan Oxy peut être associé à un couple $(a; b)$. Nous appelons a la coordonnée en x (ou abscisse) et b la coordonnée en y (ou ordonnée). Nous disons que P a les coordonnées $(a; b)$ et nous parlons du point $(a; b)$ ou du point $P(a; b)$.

Réciproquement, chaque couple $(a; b)$ détermine un point P de coordonnées a et b. Nous repérons un point en mettant un point rond :



- **Analyse Série 1 exercices 1 & 2**

[1] Swokowski E.W. et Cole J.A, *Algèbre*, p.140

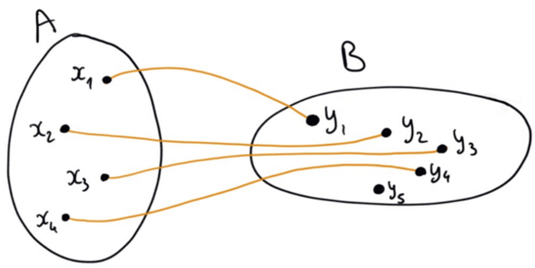
c) Fonctions et applications

Définition : Une **fonction** est définie par :

1) <u>Un ensemble A</u> appelé **ensemble de départ**, ou **source**.

2) <u>Un ensemble B</u> appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.

3) <u>Une règle de correspondance</u>, qui à chaque élément de l'ensemble de départ $x \in A$ fait correspondre zéro (aucun) ou un élément de l'ensemble d'arrivée $y \in B$.

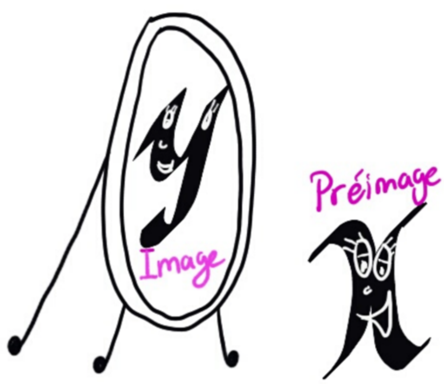


Définition : Si à chaque élément de l'ensemble de départ la règle de correspondance associe exactement un élément de l'ensemble d'arrivée, il s'agit d'une **application**.

Lorsque cela n'est pas précisé, nous prendrons comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble des nombres réels.

Définitions :

- Si x appartient à l'ensemble de départ A et y est un élément de l'ensemble d'arrivée B qui correspond à x, y est appelé **l'image de $\boldsymbol{x}$** (x possède au plus une image)
- x est appelé une **préimage de $\boldsymbol{y}$** (y peut posséder zéro, une ou plusieurs préimages)
- On désigne souvent une fonction par les lettres $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ ou $\boldsymbol{h}$
- Si on désigne la fonction par f alors on note : $\boldsymbol{f(x)}$ l'image de x
- On note : $f: x \longmapsto f(x) = y$ de A vers B $\underset{équivalent}{\Longleftrightarrow}$ $f: \begin{cases} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) = y \end{cases}$
- Le graphique de f est la représentation géométrique des couples de coordonnées $(x; f(x))$ où $x \in D_f$.



Il arrive souvent que le calcul des images peut se faire à l'aide d'une formule. On parle d'expression fonctionnelle de f.

<u>Exemple :</u> Prenons pour l'exemple la fonction qui à chaque nombre x associe sa racine carrée.
La formule qui nous intéresse est $\sqrt{x}$. La fonction f peut alors être décrite à l'aide de sa formule :

$$f:\begin{cases} D_f \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases} \qquad ou \qquad f: x \mapsto \sqrt{x} \qquad ou \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

Dans l'exemple choisi, on constate que la variable x ne peut pas prendre n'importe quelle valeur réelle car elle ne doit pas être négative. L'ensemble des éléments de départ pour lesquels $f(x)$ est définie s'appelle **domaine de définition** de la fonction f, noté D_f. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $D_f \subset \mathbb{R}$.

Dans l'exemple : $D_f =$

Définition : Le **domaine de définition** (ou ensemble de définition) d'une fonction f est l'ensemble des nombres appartenant à $\mathbb{R}$ qui ont une image par f. Cet ensemble est noté D_f.

Exemples :

1) $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3x+6} \end{cases}$

   La source (ensemble de départ) est : ………… Le but (ensemble d'arrivée) est : …………

   Le domaine de définition est :……………………

   L'image de 4 est : ………………………………

   Une préimage de $\frac{1}{9}$ est : ……………………………………………………………………

2) $g: \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix}$

   La source est : …………………………………….. Le but est : ………………………………

   Le domaine de définition est : ………………………… L'image de 4 est : …………………

   Une préimage de 6 est : …………………………………… Y en a-t-il une autre ? ……………….

3) $h: \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{matrix}$

   La source est : …………………………………….. Le but est : ………………………………

   Le domaine de définition est : ……………………………………

   L'ensemble des préimages de 36 est : …………………………………………………

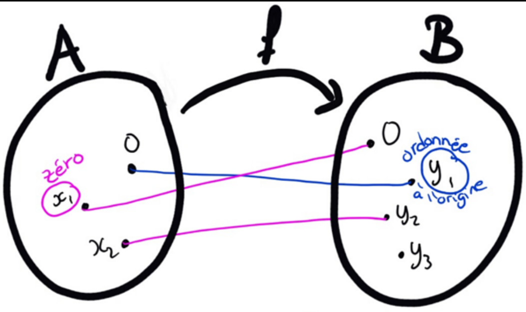
4) Considérons la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par l'expression fonctionnelle $f(x) = x^2 + 5$

   L'image de 3 est : ……………………………… L'image de -2 est : ………………………………………………

   L'ensemble image de f est l'intervalle $[5; +\infty[$: ………………………………………………

Définitions :

- **L'ordonnée à l'origine** d'une fonction réelle f est l'image de 0. Elle se note : $f(0)$.
- Les zéros d'une fonction réelle f est l'ensemble des préimages de 0. Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres x ayant 0 comme image.



Exemples :

1. On considère la fonction : $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 5x-2 = f(x) \end{cases}$

a) Calculer l'ordonnée à l'origine de f : ....

b) Calculer l'ensemble des zéros de f : ....

c) Calculer l'image de 2 par f: ....

d) Y'a-t-il une préimage de 2 par f ? ....

e) Quelle est la valeur de f en 2 ? ....

f) Y a-t-il des préimages de -2 par f ? ....

g) Calculer $f(3)$: ....

h) Calculer $^{r}f(3)$: ....

i) Calculer $^{r}f(-2)$: ....

2. $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3x+6} \end{cases}$

a) Calculer l'ordonnée à l'origine de f : ....

b) Calculer l'ensemble des zéros de f : ....

3. $g: \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix}$

a) Calculer l'ordonnée à l'origine de f : ....

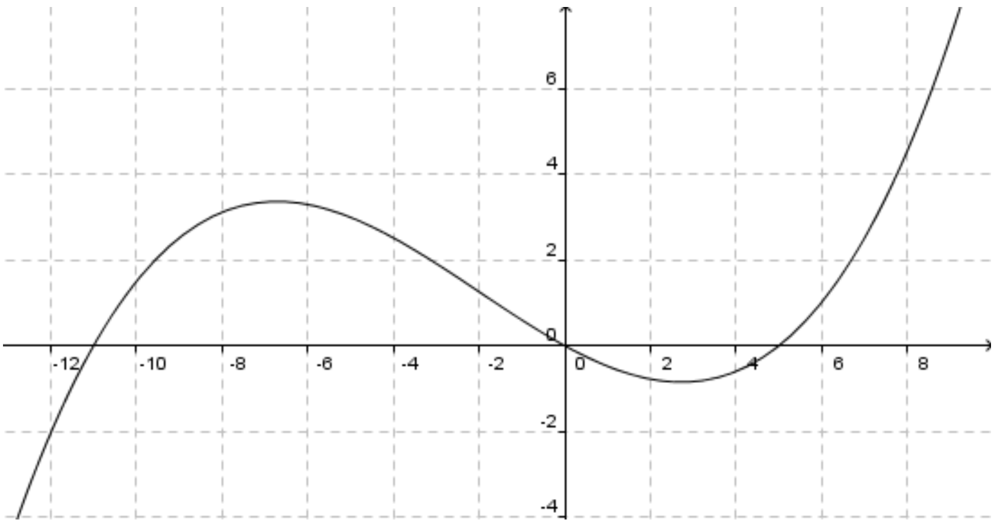
b) Calculer l'ensemble des zéros de f : ....

➢ ***Analyse Série 1 exercices 5 à 12***

d) Lecture et interprétation d'un graphique

Définition : Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Le graphe de f est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que x appartient à D_f et $y = f(x)$.
On peut représenter le graphe (en partie) d'une fonction dans un système d'axes.
Un point $(x; y)$ situé sur la courbe satisfait $y = f(x)$.
La valeur de x se lit sur l'axe horizontal, appelé ....
La valeur de y ou $f(x)$ se lit sur l'axe vertical, appelé ....

Exercice : Pour la fonction partiellement représentée :



a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre l'axe horizontal et la fonction. Que peut-on en déduire pour f ?

b) Donner un encadrement à l'unité pour $f(-7)$

c) Est-ce que f est définie en -15 ?

d) Combien de préimages est-ce que 1 possède au minimum ?

➢ **Analyse Série 1 exercices 6 à 16**

e) Exemple de fonction représentant une situation concrète

Diverses règles sont utilisées pour déterminer le dosage pour enfant d'un médicament en pourcentage du dosage pour adulte. Ces règles sont données en fonction de l'âge a d'un enfant de 2 à 13 ans.

Parmi ces règles, on trouve :

La règle de Young : $Y(a) = \frac{100 \cdot a}{a+12}$

La règle de Cowling : $C(a) = \frac{100}{24}(a+1)$

Compléter le tableau suivant puis, à l'aide de ce tableau, répondre aux questions ci-dessous.

$\boldsymbol{a}$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
$\boldsymbol{Y(a)}$												
$\boldsymbol{C(a)}$												

1) Pour quels âges la règle de Young produit-elle des dosages supérieurs à celle de Cowlong ?

2) A quel âge ces dosages diffèrent-ils le plus ?

3) Quelle est alors la différence pour un dosage adulte de 10 ml ?

4) Quel pourcentage du plus petit dosage, cette différence représente-t-elle ?

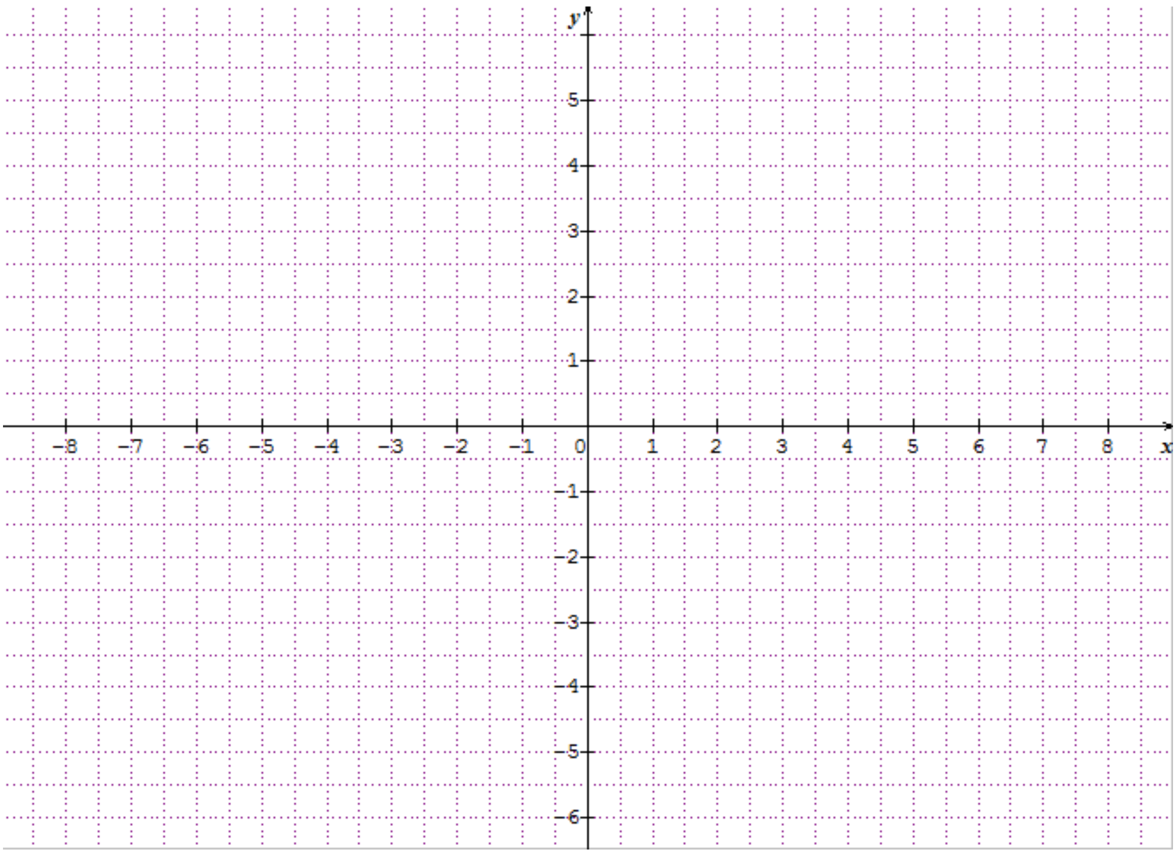
c) Droites

Ce chapitre est très important durant les 4 années de collège ! C'est pourquoi, même s'il a déjà été étudié au cycle, il est important de le revoir. En deuxième année, vous reverrez ce chapitre en géométrie vectorielle dans le plan (2 dimension). En troisième année, vous reverrez ce chapitre en Analyse pour déterminer la droite tangente à une fonction et aussi en géométrie vectorielle dans l'espace (3 dimensions). En 4e année ce chapitre sera utilisé aussi en analyse.

a) L'application linéaire (passe par l'origine)

Rappel de la représentation graphique de la fonction f définie par $\boxed{\boldsymbol{f(x) = x}}$
ou autrement dit de la droite d'équation $\boldsymbol{y = x}$:

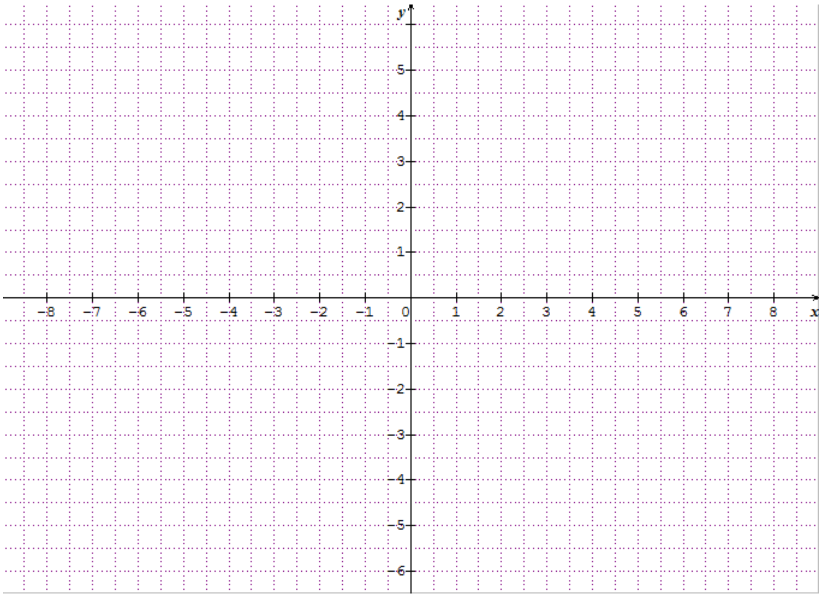
x	
y	



Particularités :

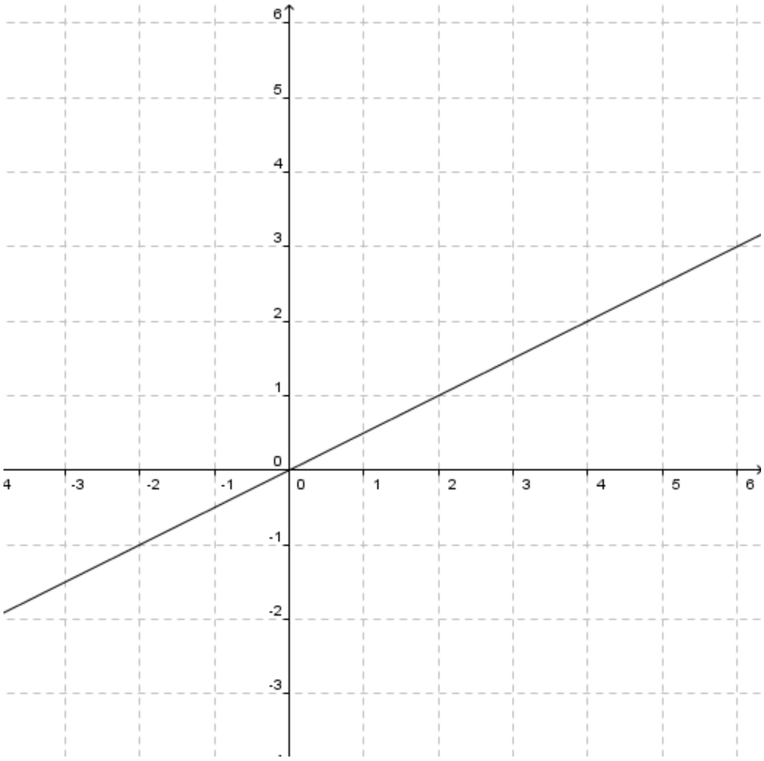
$\boxed{f(x) = mx}$ **ou** $\boxed{y = mx}$

Soit f définie par $f(x) = 3x$ ou autrement dit soit l'équation $y = 3x$.
Représentation graphique des points $(x; y)$ qui satisfont cette équation :



Le facteur 3 correspond à :

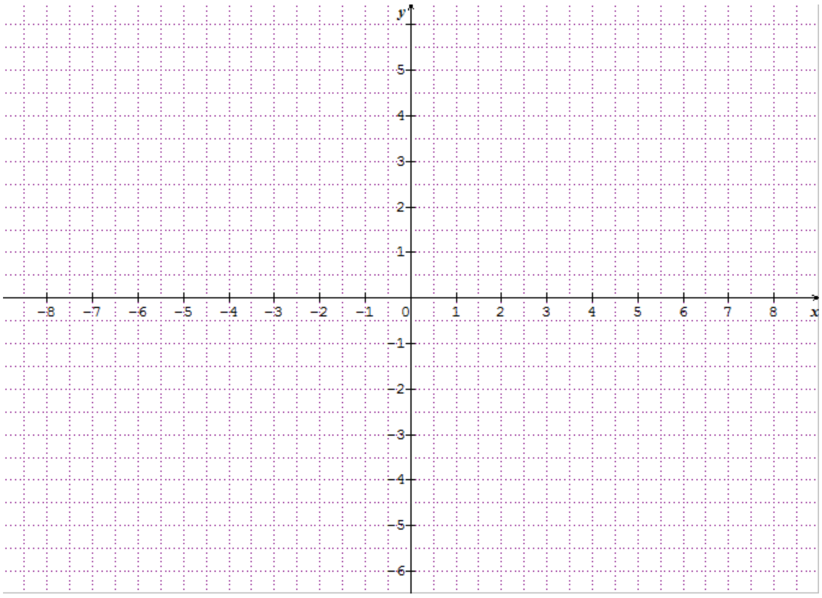
Soit la droite d représentée graphiquement. Quelle est son équation $d: y = ?$



b) L'application affine (ne passe pas par l'origine)

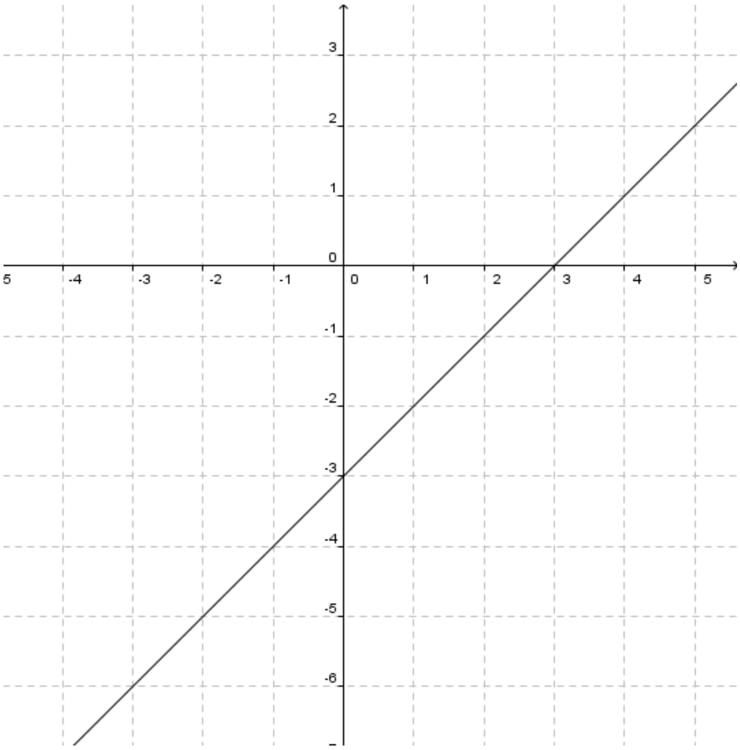
$$\boxed{f(x) = x + h}$$

Soit f définie par $f(x) = x + 2$ ou autrement dit soit l'équation $y = x + 2$.
Représentation graphique des points $(x; y)$ qui satisfont cette équation :



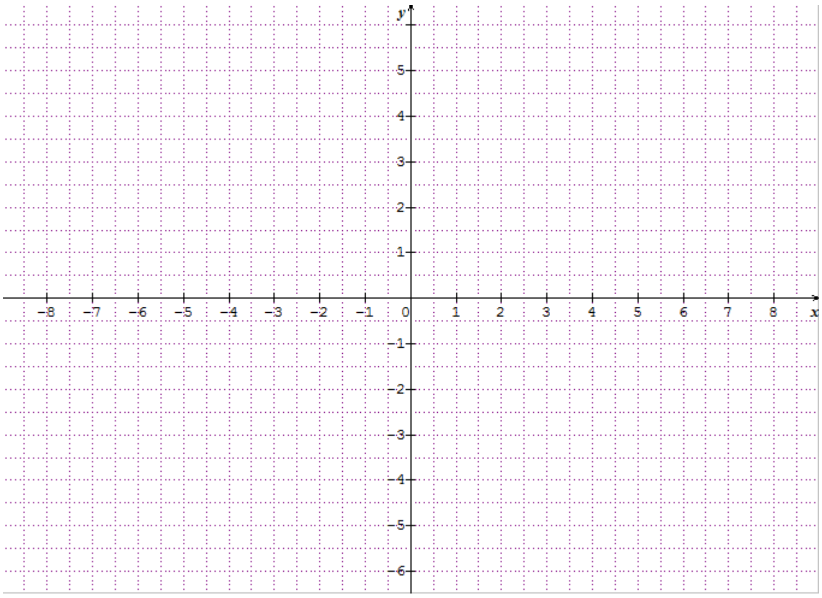
Le terme 2 correspond à :

Soit la droite d représentée graphiquement. Quelle est son équation $d: y =?$



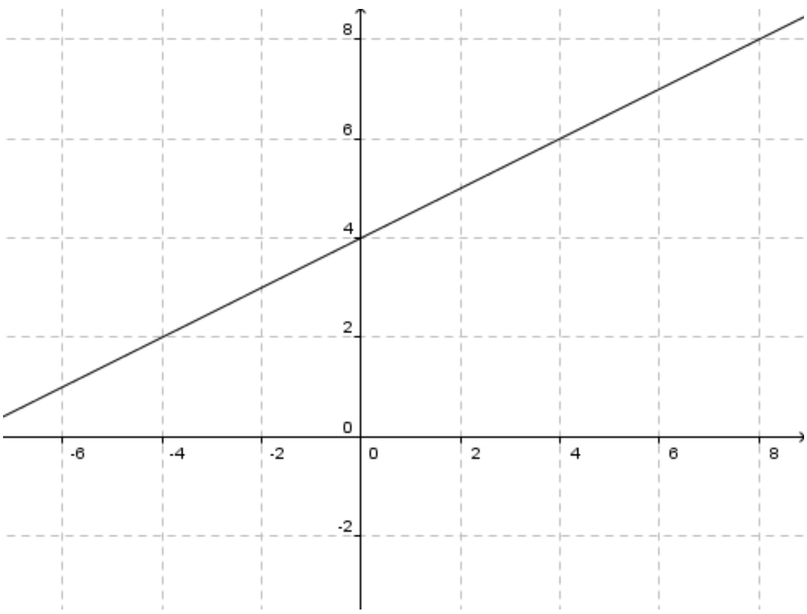
$\boxed{f(x) = mx + h}$ **ou** $\boxed{y = mx + h}$

Soit f définie par $f(x) = 3x + 2$ ou autrement dit soit l'équation $y = 3x + 2$.
Représentation graphique des points $(x; y)$ qui satisfont cette équation :



Le facteur 3 et le terme 2 correspondant à :

Soit la droite d représentée graphiquement. Quelle est son équation $d: y =$?



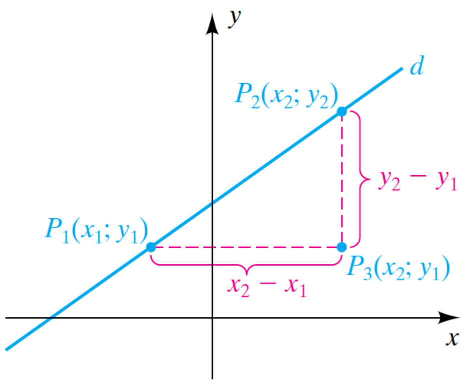
c) Points particuliers par calculs et graphique

Définition :

Si $m \neq 0$ la fonction f définie par $f(x) = mx + h$ est appelée **fonction (polynômiale) du premier degré**.

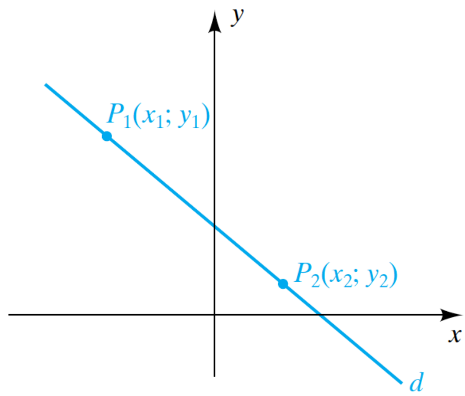
Deux cas peuvent alors se présenter :

(a) Pente positive (la droite monte)



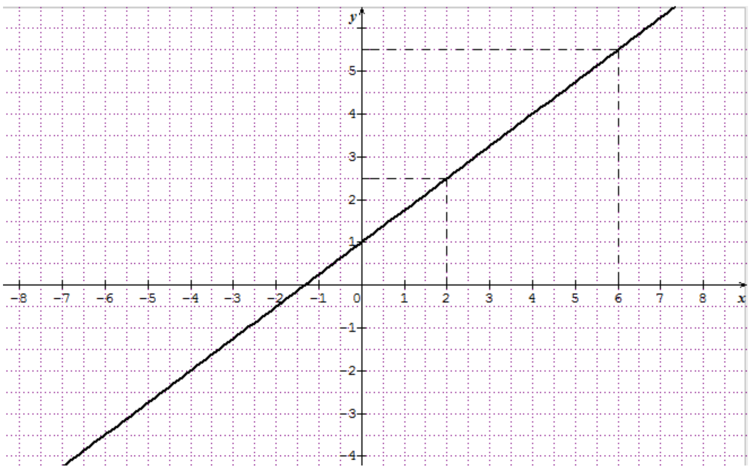
Dans le cas où $m > 0$ on dit que la **droite est croissante**.

(b) Pente négative (la droite descend)



Dans le cas où la $m < 0$ on dit que la **droite est décroissante**.

Pour mieux comprendre les formules qui vont découler, prenons un exemple :
Considérons la droite représentée ci-contre.
On voit qu'elle passe par les points $(0; 1)$, $(2; 2{,}5)$ *et* $(6; 5{,}5)$



Nous désirons connaitre l'équation de cette droite par calculs. Commençons par déterminer la pente.

Définition : La **pente** d'une droite est le rapport $\boldsymbol{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δx est un accroissement selon l'axe Ox et Δy l'accroissement correspondant selon l'axe Oy.

Soit $P_1(x_1; y_1)$ et $P_2(x_2; y_2)$ deux points sur la droite, la pente est : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

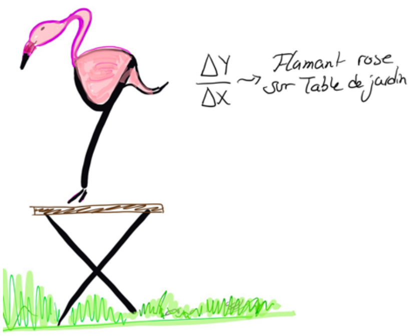
Remarque : ce rapport est indépendant du choix des points P_1 et P_2 sur la droite.

pente = $\frac{\text{Vertical}}{\text{Horizontal}}$ ⇝ $\frac{\text{Vache}}{\text{Herbe}}$

Calculons la pente avec les deux points : $(0; 1)$ *et* $(2; 2{,}5)$*:*

$m =$

Attention à toujours avoir une fraction simplifiée au maximum avec des entiers.



Nous aurions pu prendre deux autres points : $(6\,;5{,}5)$ *et* $(-4\,;-2)$ *:*
On calcule : $m =$

Définition :
Le graphe de f est une droite qui passe par le point $(0\,;h)$ et h est appelée **l'ordonnée à l'origine**.
On peut calculer ce h à l'aide de $f(0)$.
Graphiquement, on peut lire l'ordonnée à l'origine comme la coordonnée en y du point d'intersection entre le graphe de f et l'axe vertical.

Pour l'ordonnée à l'origine*, ce n'est pas compliqué puisque l'on peut clairement lire le point …………….*

Admettons que nous n'arrivions pas à le lire et que nous ne connaissions que deux points : $(2\,;2{,}5)$ *et* $(6\,;5{,}5)$*. Nous avons déjà déterminé la pente par calcul.*

Nous savons alors que l'équation de la droite ci-dessus sera de la forme : $f(x) = \frac{3}{4}x + h$

Déterminons l'ordonnée à l'origine : Comme la droite passe par $(2\,;2{,}5)$ *et* $(6\,;5{,}5)$*, on peut utiliser un point et écrire :*

Vérifions avec l'autre point :

Nous avons donc trouvé que l'ordonnée à l'origine, h*, vaut* 1*.*
On peut alors écrire l'équation de la droite f : $f(x) =$ *ou* $y =$

Définition : Le **zéro d'une droite** revient à cherche la valeur de x lorsque $f(x) = 0$.
Graphiquement, il s'agit de la coordonnée en x du point d'intersection entre la fonction et l'axe horizontal.

Calculons le zéro de la droite $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$ *:*

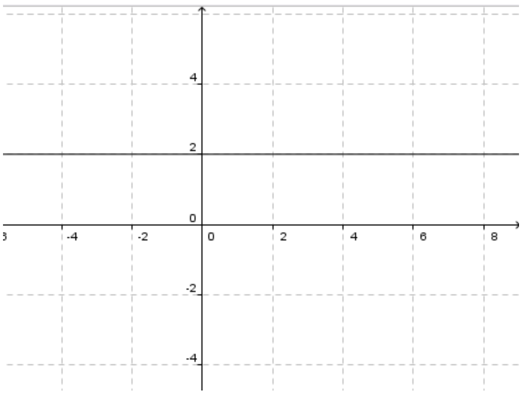
- **Analyse Série 2 exercices 1 à 7**

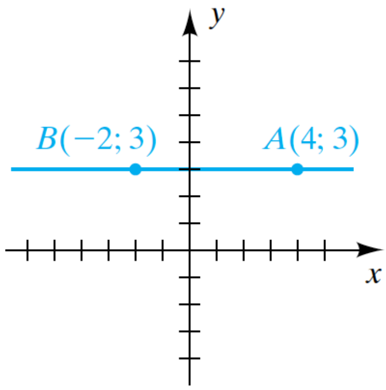
d) Cas particuliers (droite verticale et droite horizontale)

Droite horizontale :

Définition :
Si $m = 0$ la fonction f alors définie par $\boldsymbol{f(x) = h}$ ou $y = h$ est appelée **fonction constante**.

Illustration : $y = 2$



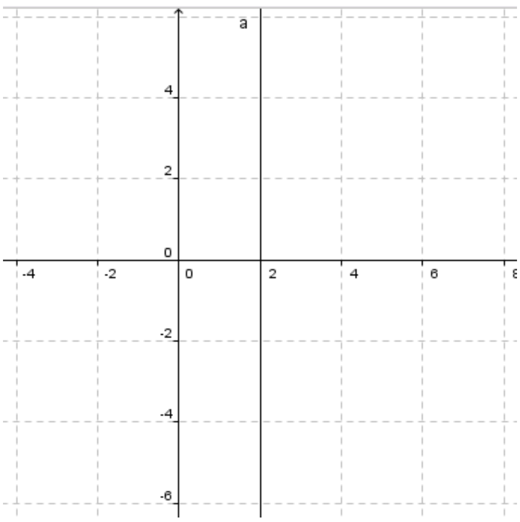


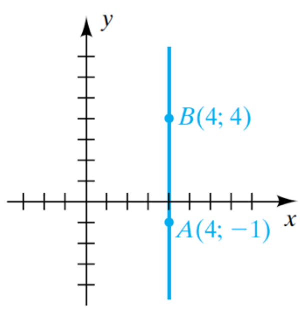
Exemple : Déterminer l'équation de la droite représentée ci-contre :

Droite verticale :

Définition : L'équation d'une **droite verticale** est : $\boldsymbol{x = k}$.

Illustration : $x = 2$





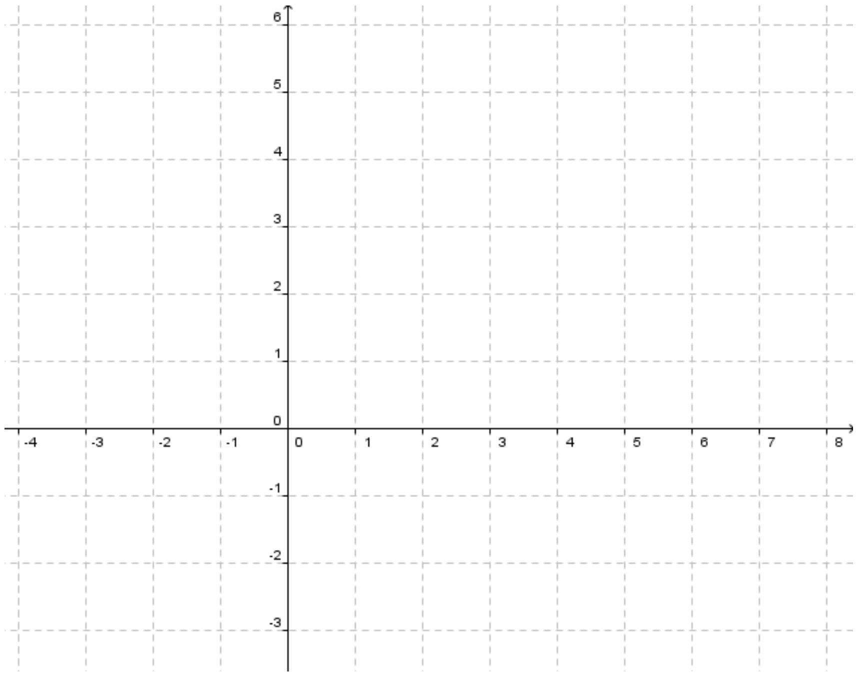
Exemple : Déterminer l'équation de la droite représentée ci-contre :

e) Intersection entre deux droites par calculs et graphique

Pour trouver le point d'intersection I des graphes de deux fonctions f et g, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

Exemple 1 : Les graphes des fonctions f et g données par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ se coupent en un point I

Représentons la situation graphiquement :



Exemple 2 : Chercher le point d'intersection entre f$(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 0$

Exemple 3 : Chercher le point d'intersection entre $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = 2x - 2$

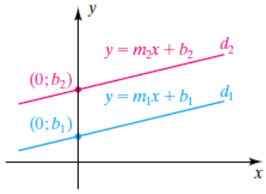
Exemple 4 : Chercher le point d'intersection entre $f(x) = 2x + 6$ et $g(x) = 2(x + 3)$

- **Analyse Série 2 exercice 8 à 11**

f) Donner l'équation d'une droite parallèle connaissant un point

Théorème sur la pente des droites parallèles :

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.



Exemple : Déterminer l'équation de la droite $g(x) = mx + h$ passant par $P(5; -7)$ qui est parallèle à la droite $f(x) = -2x + \frac{4}{3}$

Comme les droites f et g doivent être parallèles, elles auront la même pente :

On peut donc écrire : $g(x) = -2x + h$

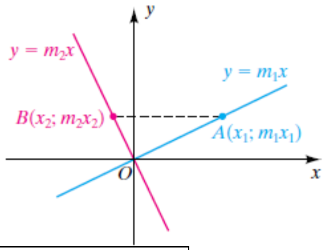
Pour déterminer h, l'ordonnée à l'origine, nous allons utiliser la deuxième information de l'énoncé : "elle doit passer par le point P" :

On a donc toutes les informations pour donner l'équation de la droite : $g(x) =$

g) Donner l'équation d'une droite perpendiculaire connaissant un point

Théorème sur les pentes de droites perpendiculaires :

Deux droites de pente m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \cdot m_2 = -1$



Reformulation de l'énoncé : Les pentes de deux droites perpendiculaires doivent être inverses et opposées l'une de l'autre : $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Exemple : Déterminer l'équation de la droite passant par $P(5; -7)$ et perpendiculaire à la droite $f(x) = -2x + \frac{4}{3}$

Puisque les droites doivent être perpendiculaires, on peut déjà écrire : $d(x) = \frac{1}{2}x + h$

(l'inverse de -2 est 2. L'opposé de 2 est $\frac{1}{2}$)

Il faut encore utiliser le point P pour déterminer l'ordonnée à l'origine :

L'équation cherchée est donc : $d(x) =$

➢ ***Analyse Série 2 ex 12 à 18 & 19 à 34***

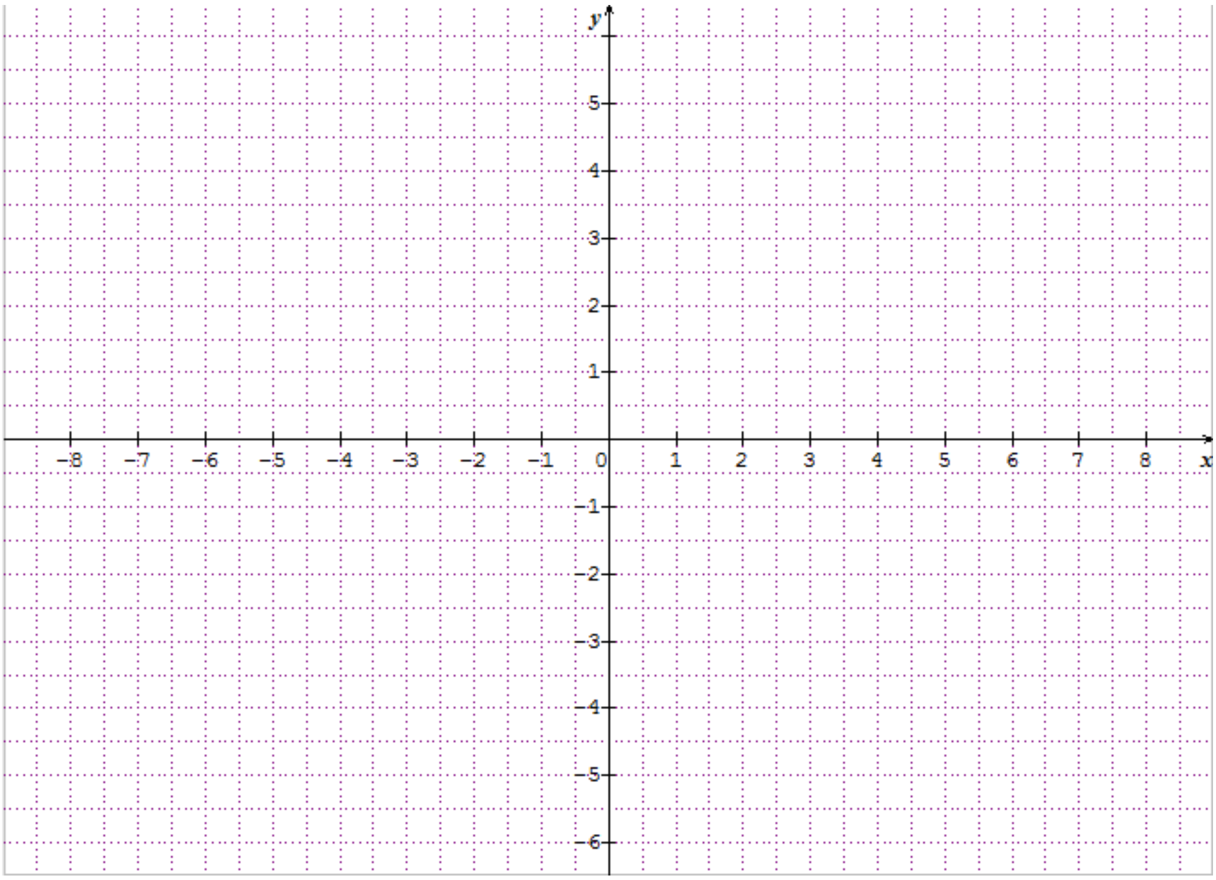
3. Fonctions du deuxième degré

a) Définition et représentation graphique

Définition : Une ***fonction polynômiale du deuxième degré*** est une fonction f donnée par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Le graphe d'une fonction polynômiale du deuxième degré est appelé ***parabole***.

Représenter graphiquement la fonction $f(x) = x^2$



Représenter sur le même graphique les fonctions suivantes :

$$g(x) = -x^2 \qquad h(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad i(x) = x^2 - 4$$

Travail de groupe :

a) Représenter graphiquement (sur une feuille quadrillée) les fonctions définies ci-dessous. (Choisir la graduation des axes de manière appropriée. Il vaut peut-être mieux d'abord faire des esquisses avant de faire une représentation plus précise)

b) Pour chaque fonction, **calculer** : le(s) zéro(s), l'ordonnée à l'origine et factoriser (si possible).

c) Essayer de donner une **méthode** qui permette d'esquisser le graphe d'une fonction du deuxième degré (c'est-à-dire une méthode qui permet de faire figurer sur le graphe les « points qui caractérisent » la fonction et « l'allure globale » de la fonction et qui soit moins fastidieuse que la traditionnelle méthode du « calculer des coordonnées de points à la pelle et relier »). Cette méthode doit répondre aux questions :

- Où lire les zéros ? (Représentation graphique et équation)
- Où lire l'ordonnée à l'origine ? (Représentation graphique et équation)
- Comment savoir si on aura une forme ∪ ou ∩ ?
- Où est l'axe de symétrie ? (Représentation graphique et équation ?
- Quel lien entre la factorisation et la représentation graphique ?

1. $f_1(x) = 4x^2 - 12x + 5$

2. $f_2(x) = -x^2 - x + 6$

3. $f_3(x) = 4x^2 - 36x + 81$

4. $f_4(x) = x^2 - 8x + 23$

Solution du travail de groupe :

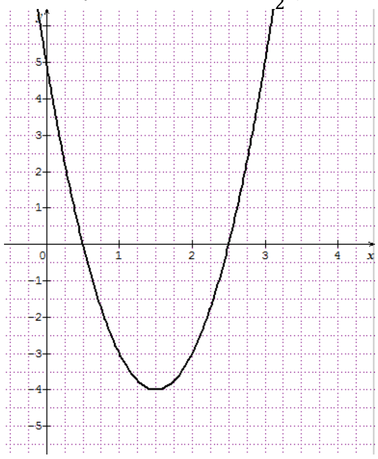
$f_1(x) = 4x^2 - 12x + 5$

- Factorisation : $f_1(x) = 4x^2 - 12x + 5 = (2x-5)(2x-1)$
- Zéros : $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64 > 0$

  donc deux zéros : $x_1 = \frac{12+\sqrt{64}}{8} = \frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{12-\sqrt{64}}{8} = \frac{1}{2}$

  (se lisent sur l'axe horizontal)

  On remarque que : $4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4x^2 - 12x + 5$
- Ordonnée à l'origine : $f_1(0) = 5$ *(se lit sur l'axe vertical)*
- Dans le sens ∪
- Axe de symétrie en $1{,}5 = \frac{3}{2}$ (entre les zéros)



$f_2(x) = -x^2 - x + 6$

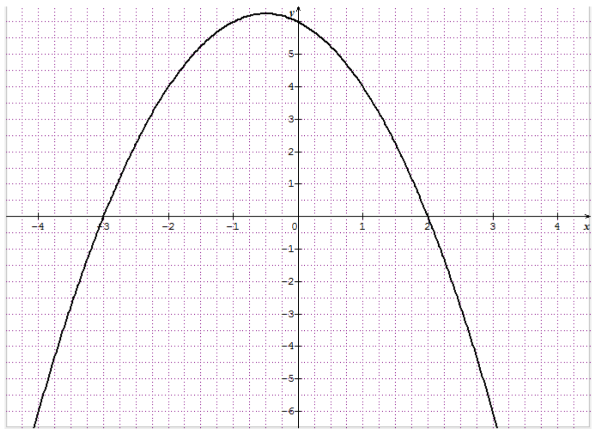
- Factorisation :

  $f_2(x) = -x^2 - x + 6 = -(x^2 + x - 6) = -(x-2)(x+3)$
- Zéros : $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-2)(x+3) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \; et \; x + 3 = 0$

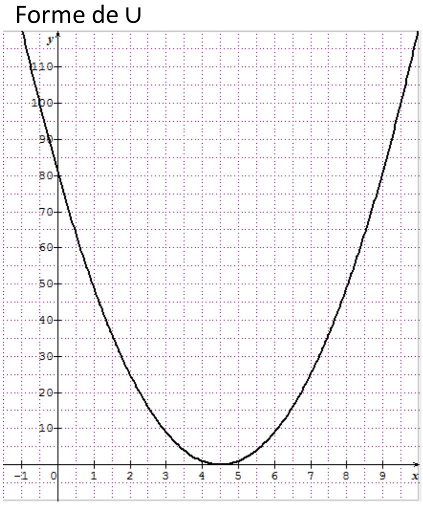
  $\Leftrightarrow x = 2 \; et \; x = -3$ donc $Z_{f3} = \{-3; 2\}$

  Résolution par factorisation. Les zéros se lisent dans l'écriture factorisée de f_2 et graphiquement, ils se lisent sur l'axe horizontal
- Ordonnée à l'origine : $f_2(0) = 6$ (se lit sur l'axe vertical)
- En forme de ∩
- Axe de symétrie en $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$



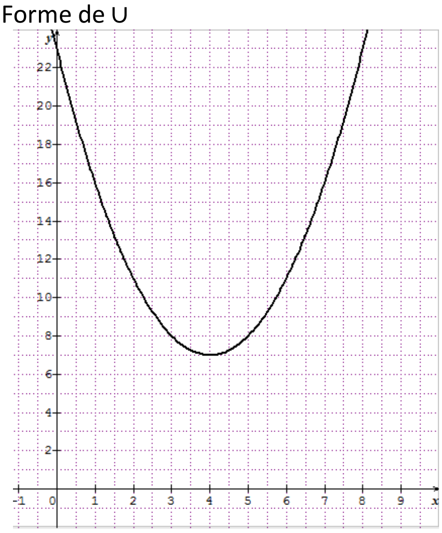
$f_3(x) = 4x^2 - 36x + 81$

- Factorisation : $f_3(x) = 4x^2 - 36x + 81 = (2x-9)^2$
- Zéros : $2x - 9 = 0$ donc $x = \frac{9}{2}$
- Ordonnée à l'origine : $f_3(0) = 81$
- Axe de symétrie au même endroit que le Zéro : en $\frac{9}{2} = 4{,}5$
- Forme de ∪



$f_4(x) = x^2 - 8x + 23$

- Zéro : $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 23 = -28 < 0$ donc pas de zéro.
- Pas d'intersection avec l'axe horizontal
- Pas de factorisation non plus
- Ordonnée à l'origine : $f_4(0) = 23$
- Axe de symétrie : en 4
- Forme de ∪



b) Etude complète de la fonction

Soit f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (avec\ a \neq 0)$

Zéros :

Pour trouver les zéros de f il faut résoudre

La fonction possède deux zéros distincts si

La fonction possède un seul zéro si

La fonction ne possède pas de zéro si

Axe de symétrie :

Cas 1 : Si la fonction possède deux zéros, il est facile de deviner où se trouve l'axe de symétrie :

Cas 2 : Si la fonction possède un seul zéro, trouver la position de l'axe de symétrie est encore plus simple :

Cas 3 : Si la fonction ne possède pas de zéro la position de l'axe de symétrie s'obtient par la même formule que dans les deux cas précédents.

Démonstration :

L'axe de symétrie d'une parabole peut se déterminer facilement. L'idée est de placer le sommet en un point x.
Illustration :

On remarque que les points $x + d$ et $x - d$ auront la même image, pour $d > 0$. A l'aide de l'équation de la parabole $f(x) = ax^2 + bx + c = y$, on peut alors injecter les deux points dans l'équation :

$$a(x + d)^2 + b(x + d) + c = a(x - d)^2 + b(x - d) + c$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + 2adx + ad^2 + bx + bd + c = ax^2 - 2adx + ad^2 + bx - db + c$$

$$\Leftrightarrow 2adx + bd = -2adx - db$$

$$\Leftrightarrow 4adx = -2bd$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2bd}{4ad} = -\frac{b}{2a}$$

Ainsi, l'abscisse de l'axe de symétrie se trouve en $x = -\frac{b}{2a}$.

Sommet :

Le sommet du graphe de la fonction f est situé sur l'axe de symétrie, il est donc donné par :

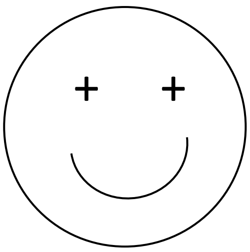
On peut vérifier que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$

Toute fonction du 2e degré peut donc s'écrire sous la forme :
$f(x) = a(x-h)^2 + k$, avec $h = -\frac{b}{2a}$ et $k = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.
Son graphe est une parabole de sommet $S(h; k)$.

Vers le haut ou vers le bas ? (sans démonstration)

Une parabole est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c = y$
Le coefficient a désigne l'orientation de la parabole :
Si $a > 0$: (coefficient positif) La parabole est convexe (en forme de U)
Si $a < 0$: (coefficient négatif) La parabole est concave (en forme de ∩)

Truc mnémotechnique : Des yeux en forme du signe du coefficient et la bouche en forme du sens de la parabole.



Phrase accompagnatrice : « C'est CON d'être **VEXÉ**, Souris. »
Phrase assez vulgaire mais qui a pour effet de rappeler le sens con**vexe**.
On parle intuitivement de "parabole qui sourit"

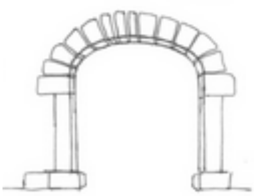
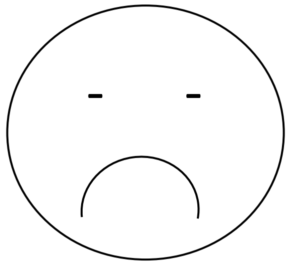


Image associée : « porte de la **cave** » pour «con**CAVE** »
On parle intuitivement de "parabole qui pleure"



- **Analyse Série 3**

Résumé :

	Forme développée	Forme Factorisée	Forme canonique
Forme	$\boldsymbol{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$	$\boldsymbol{y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$	$\boldsymbol{y = f(x) = a(x - h)^2 + k}$
Sommet	$\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a} \quad k = f(h)}$	$\boldsymbol{h = \frac{x_1 + x_2}{2} \, k = f(h)}$	$\boldsymbol{h}$ **et** $\boldsymbol{k}$
Zéros	$\boldsymbol{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$	$\boldsymbol{x_1}$ **et** $\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x = h \pm \sqrt{-k/a}}$

Exemple : Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{7}{2} \quad = \quad (x - \quad)(x - \quad) \quad = \quad (x - \quad)^2 +$$

Forme : ☐ convexe ☐ concave **Axe de symétrie :** $-\frac{b}{2a} =$

Sommet : $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) =$

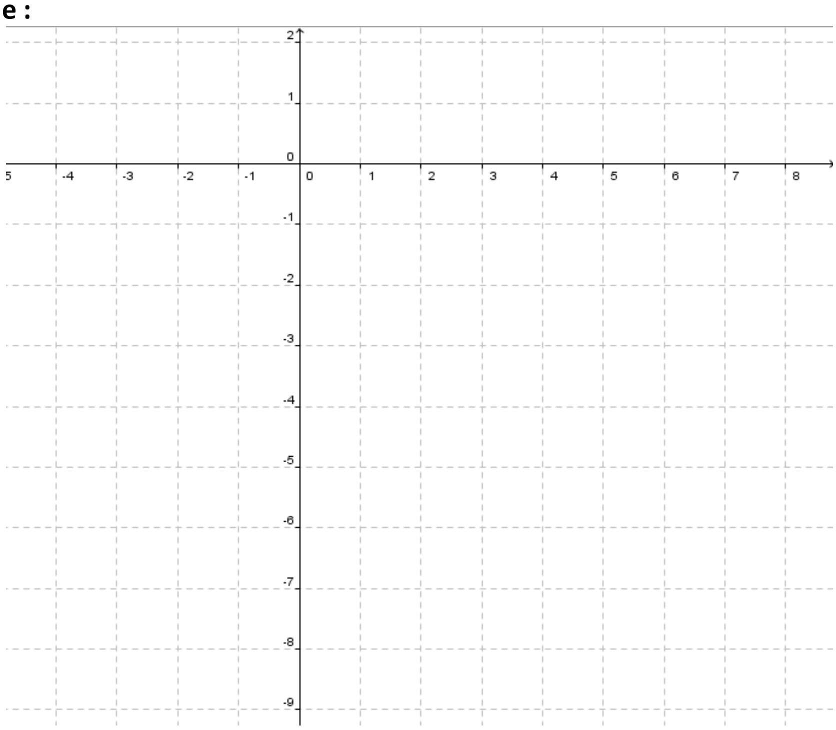
Intersection avec les axes

- **Ordonnée à l'origine :** $f(0) =$ donc $f \cap Oy = \{(0\,; \quad)\}$
- **Zéros :** $\Delta = b^2 - 4ac =$

  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} =$

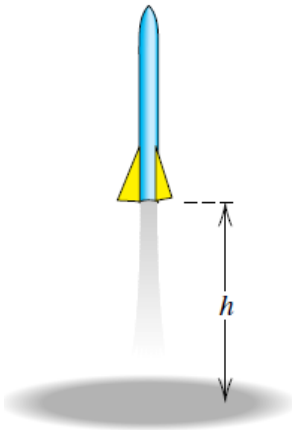
  donc $f \cap Ox = \{(\quad ; 0); (\quad ; 0)\}$

Représentation graphique :

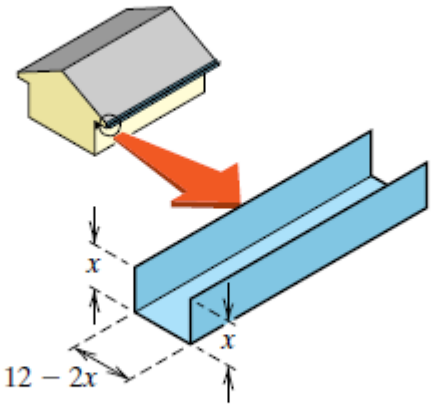


a) Mise en équation de problèmes courants

Pour développer ce paragraphe, nous allons prendre deux exemples et des exercices



Exemple de problème : Une fusée jouet est lancée verticalement depuis le sol, comme le montre le dessin ci-contre. Si la vitesse initiale est de $36\ m/s$ et si la seule force agissante est la force d'attraction, la hauteur h (en m) de la fusée au-dessus du sol après t secondes est donnée par $h = -4{,}9t^2 + 36t$.
A quelle hauteur maximum sera la fusée et à quel temps ?



Exemple 2 : On veut faire une gouttière avec une longue feuille de métal de 12cm de large en pliant les deux longs côtés et en relevant perpendiculairement à la feuille.

Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

➢ ***Analyse Série 4***

4. Fonction racine carrée

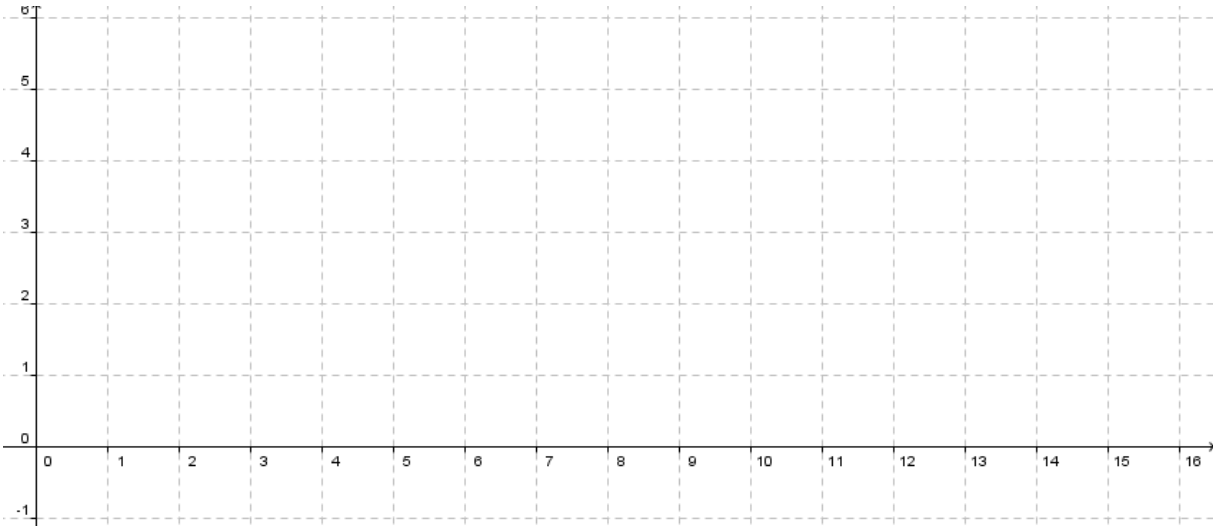
Définition :

La fonction **racine carrée** est définie par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$

Calculons quelques images

x	
$\sqrt{x}$	

Représentation graphique :



Exercice :

1) Quel sera le domaine de la fonction $g(x) = \sqrt{x-3}$?

2) Calculer quelques images pour ensuite représenter graphiquement la fonction g sur le même graphique que la fonction f

➢ ***Analyse Série 5 ex 1***

Point d'intersection et point d'intersection virtuels de certaines fonctions

Lorsque nous cherchons le point d'intersection entre une fonction irrationnelle et une autre fonction, il faut (comme vu en Algèbre) passer l'égalité au carré ce qui ajoute des **solutions virtuelles**. Nous allons étudier sa signification géométrique.

Exemple : Trouver le point d'intersection entre $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = -x + 1$

$$\sqrt{x+1} = -x + 1$$

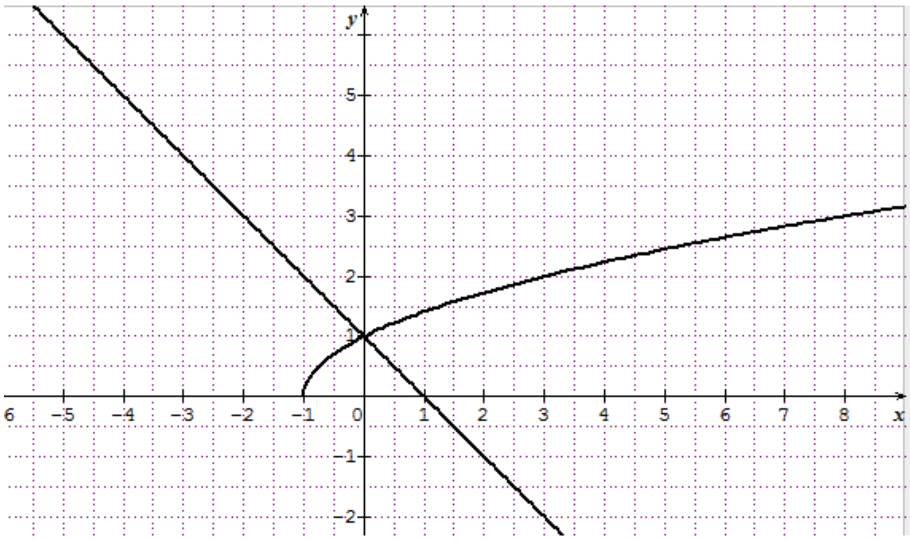
$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (-x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 3$$

On trouve donc $x = 0$ et $x = 3$ avec l'algèbre. Observons le graphique de la situation :



Vérifions les solutions trouvées dans $f(x)$ et $g(x)$:

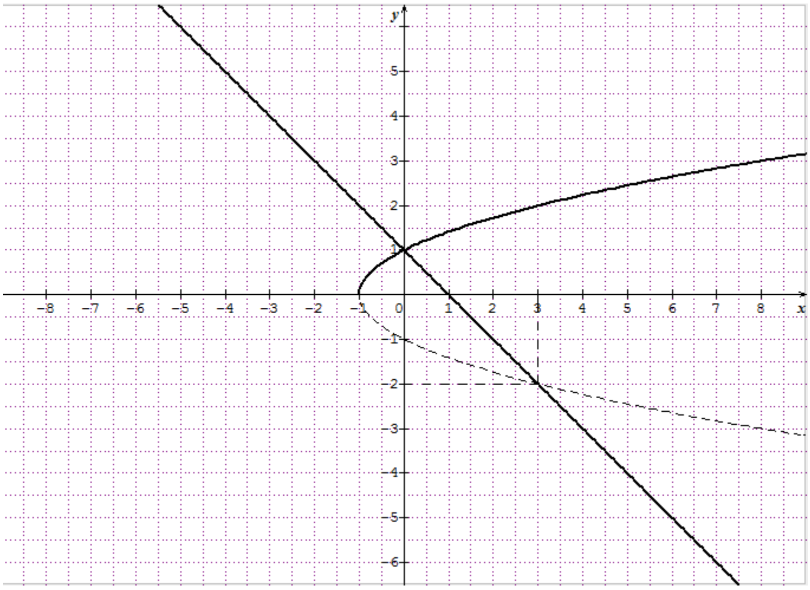
- $f(3) =$
- $g(3) =$
- $f(-3) =$
- $g(-3) =$

Il faut donc éliminer la "solution" $x = 3$.

On a donc : $f \cap g = \{(0;1)\}$

Comment expliquer cela graphiquement ?

En injectant les deux solutions dans l'équation $\sqrt{x+1} = -x+1$, on remarque que $x = 0$ est bien solution mais $x = 3$ n'en n'est pas une. Il s'agit d'une ***solution virtuelle*** : que l'on peut observer en traçant la symétrie de la fonction $f(x)$.



Exemple : Trouver le point d'intersection entre $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = 2x - 4$

➢ ***Analyse Série 5 exercice 2***

5. Fonction inverse

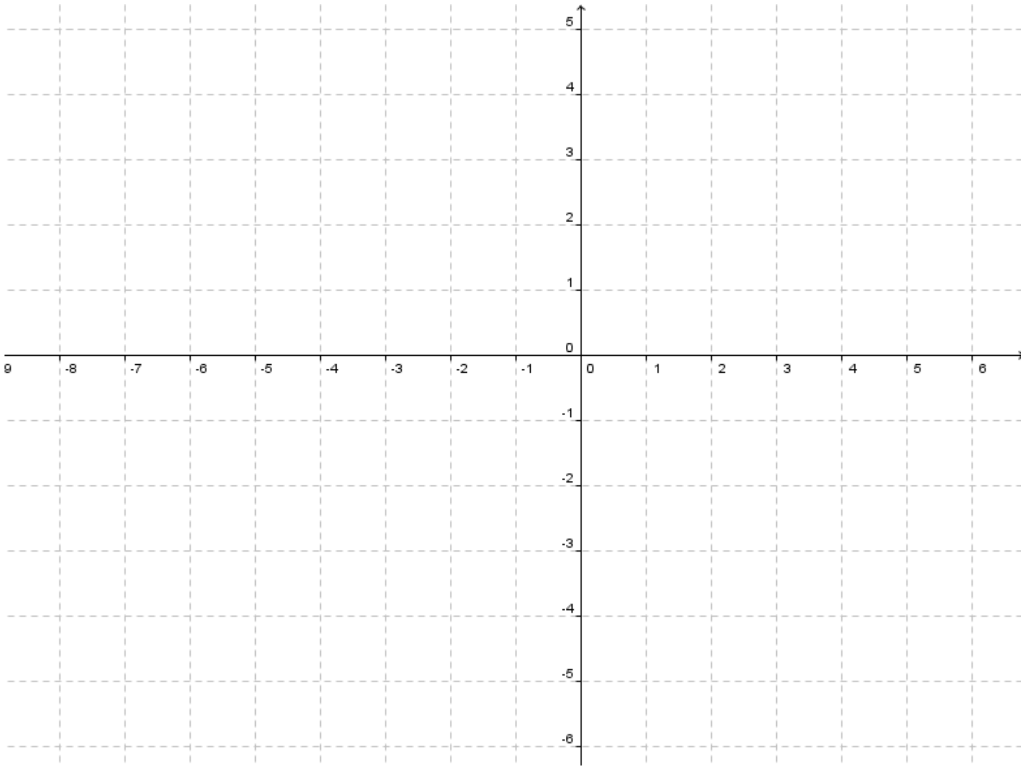
Définition :

La **fonction inverse** est définie par : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$

Calcul de quelques images :

x	
$\frac{1}{x}$	

Représentation graphique de la fonction f :



Exercice :

1) Déterminer le domaine de la fonction $g(x) = \frac{1}{x-1}$

2) Calculer quelques images (au dos de cette page)

3) Représenter la fonction g sur le même système que f

➢ ***Analyse Série 5 exercice 3 & 4***

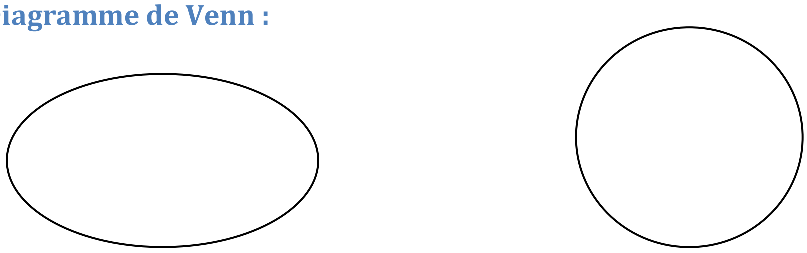
6. Compositions simples avec des fonctions affines[2]

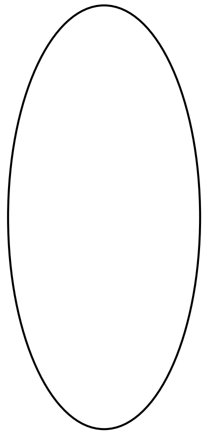
Définition : On considère une fonction f de A vers B et une fonction g de B vers C.

On appelle **composée de f et de g** notée $g \circ f$, lu « g rond f » définie par $\begin{cases} g \circ f : A \to C \\ x \mapsto g\big(f(x)\big) \end{cases}$

Notation : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Diagramme de Venn :





Exemple : f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Soient les fonctions $f : x \mapsto x + 1$ et $g : x \mapsto x^2$

Effectuons la composition : $x \xrightarrow{f} (x+1) = u \xrightarrow{g} u^2 = (x+1)^2$

Autre notation : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+1) = (x+1)^2$;
donc : $g \circ f : x \mapsto (x+1)^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Effectuons la composition dans l'autre sens : $f \circ g : x \xrightarrow{g} x^2 = u \xrightarrow{f} u + 1 = x^2 + 1$

On constate que $\boldsymbol{g \circ f \neq f \circ g}$

Exercice : Soient deux fonctions : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 3x + 4$

Effectuer les compositions suivantes

a) $(g \circ f)(x) =$

b) $(f \circ g)(x) =$

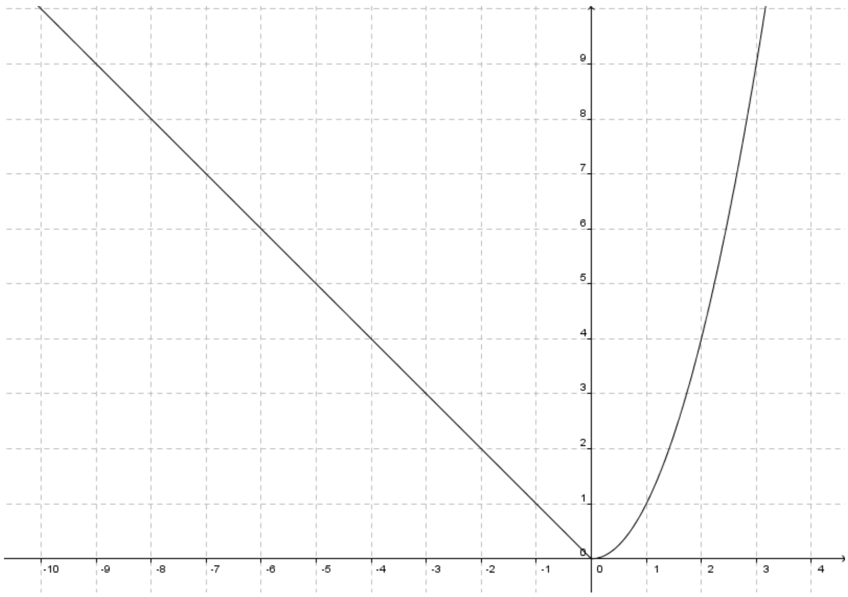
➢ ***Analyse Série 5 exercice 5***

[2] Voir Notions élémentaires p.6

7. Fonctions définies par morceaux

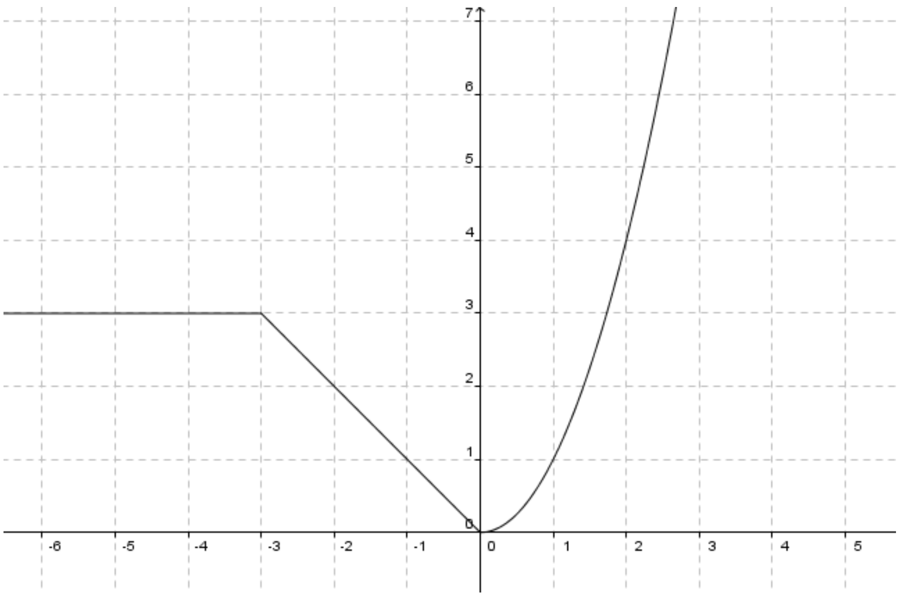
Considérons la fonction $f(x) = \begin{cases} -x, si\ x < 0 \\ x^2, si\ x \geq 0 \end{cases}$ On dit qu'elle est **définie par morceaux.**

Voici sa représentation graphique de la fonction f



Une fonction peut être définie en plus que deux morceaux :

Voici la représentation graphique de la fonction $g(x) = \begin{cases} 3, si\ x < -3 \\ -x, si -3 \leq x < 0 \\ x^2, si\ x \geq 0 \end{cases}$

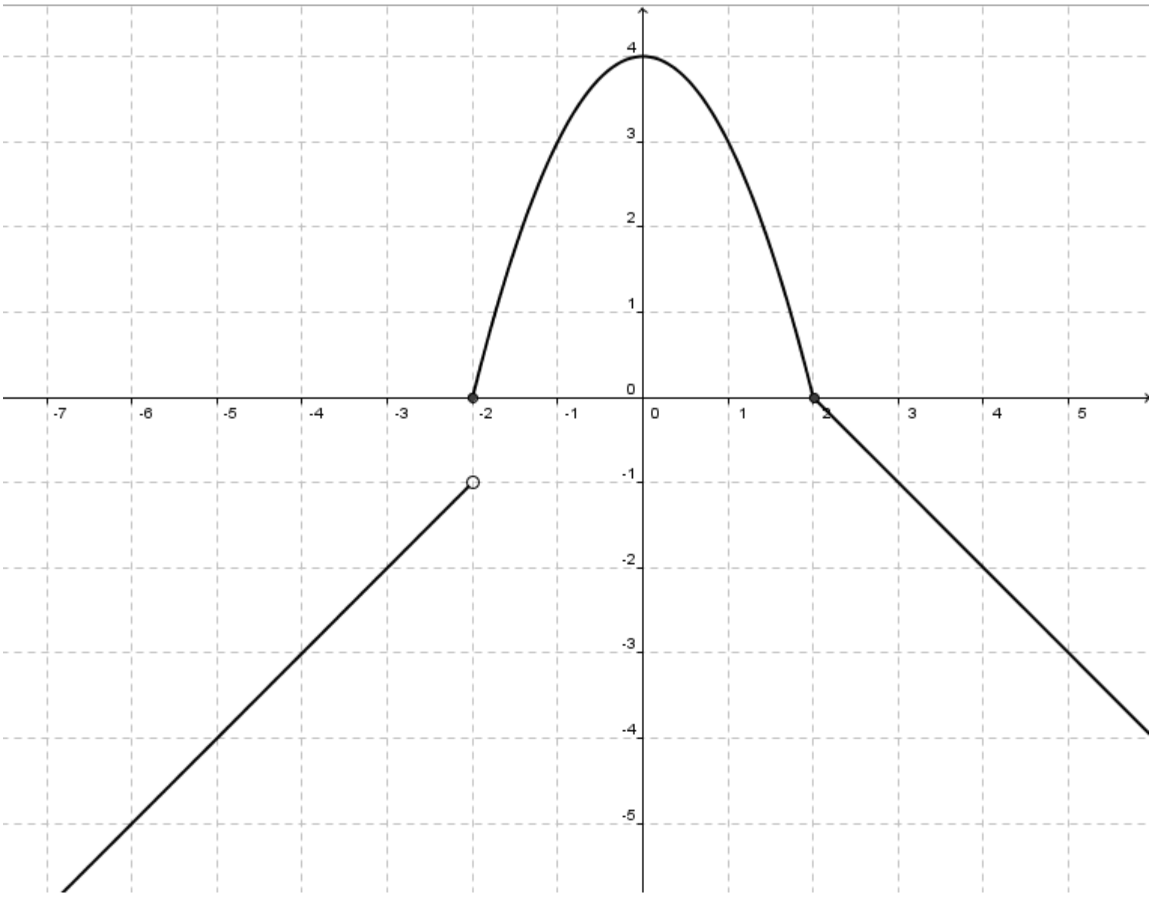


➢ ***Notions élémentaires p.31-32 &p.38-39 ex 27 à 31& Fonctions Série 6***

8. Fonctions brisées définies par morceaux

Les fonctions définies par morceaux n'ont pas toujours chaque morceau collé au même endroit que commence la partie suivante. L'important est que le domaine soit entièrement utilisé une seule fois : pas deux images différentes pour une même préimage.

Exemple : Voici la représentation graphique de la fonction $f(x) = \begin{cases} x+1; si\ x < -2 \\ -x^2+4; si\ -2 \leq x \leq 2 \\ -x+2; si\ x > 2 \end{cases}$



On remarque qu'en $x = -2$, la fonction a un saut d'une partie à une autre.

Si nous désirons connaitre $f(-2)$, il faudra prendre la ligne $-x^2 + 4$ pour en calculer l'image :

$$f(-2) = -(-2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

Remarquons aussi qu'en $x = 2$, les deux parties (droite et parabole) sont collées l'une à l'autre. Nous devons calculer l'image de 2 avec la ligne$-x^2 + 4$ car c'est la ligne où $x = 2$ est défini :

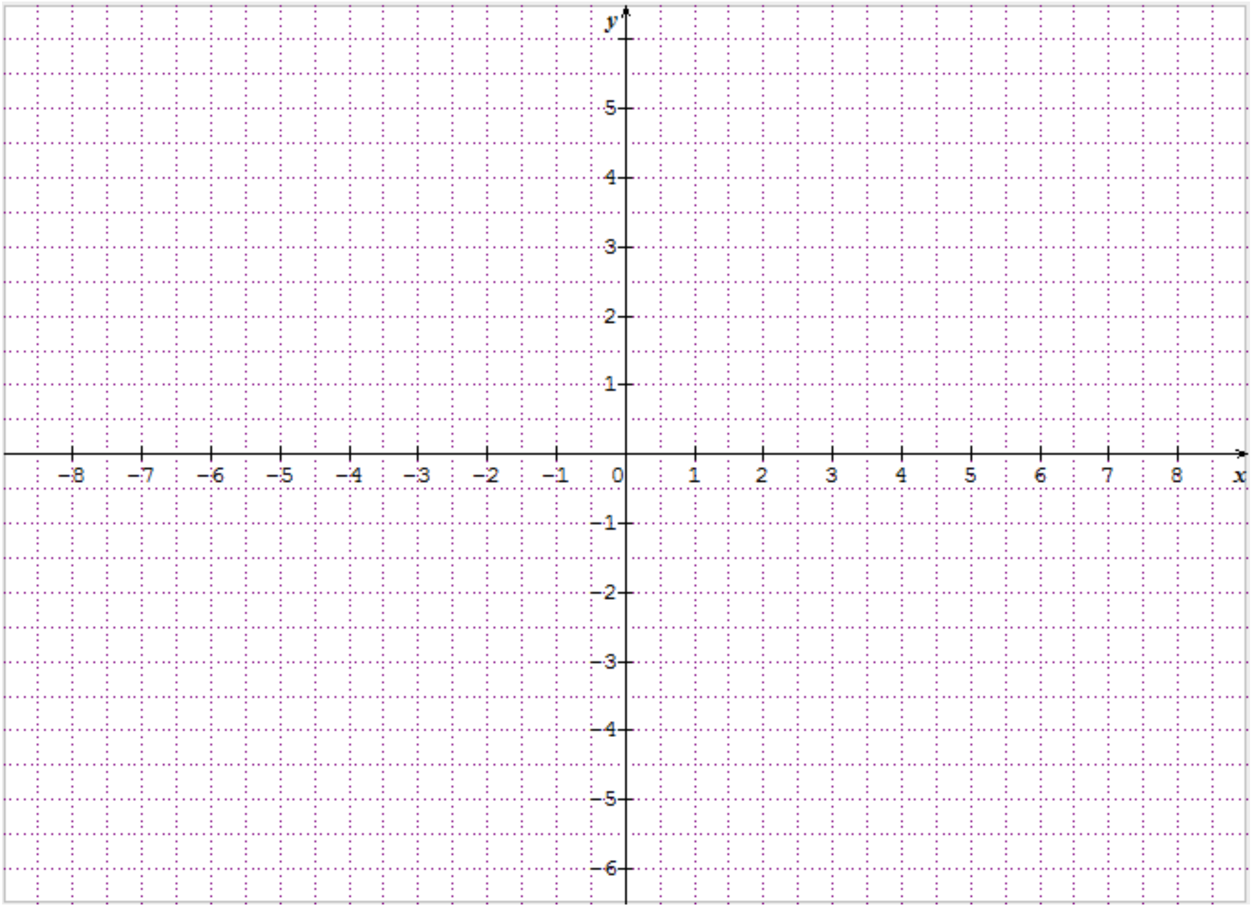
$$f(2) = -2^2 + 4 = -4 + 4 = 0$$

Notation :

Lorsque l'image est à un endroit, on symbolise le point par un rond colorié. Lorsque l'image s'approche très proche, on utilise un rond vide.

Exercice : Représenter la fonction suivante ci-dessous

$$f(x) = \begin{cases} -x+2; x \leq 1 \\ x^2 - 4; x > 1 \end{cases}$$



Exercice (à faire sur un feuille à part):

Pour chaque fonction : Représenter graphiquement (un graphique par fonction), préciser en quel(s) point(s) elles sont brisées ou continues (pas brisées).

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+3; si\ x < 0 \\ x^2; si\ 0 \leq x < 2 \\ 1; si\ x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3; si\ x < -2 \\ -x+1; si -2 \leq x \leq 2 \\ -3; si\ x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -2x; si\ x < -1 \\ x^2; si -1 \leq x < 1 \\ -2; si\ x \geq 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x-3; si\ x \leq -2 \\ -x^2,; si -2 < x < 1 \\ -x+4; si\ x \geq 1 \end{cases}$

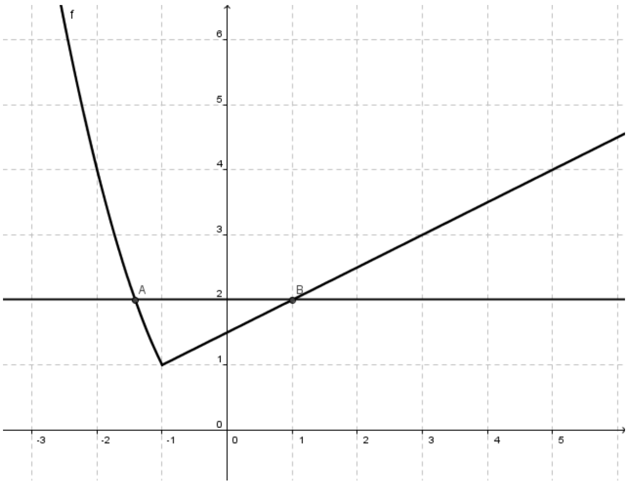
9. Point d'intersection et point d'intersection virtuels de certaines fonctions

Exemple avec une fonction définie par morceaux : Déterminer le(s) point(s) d'intersection entre

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ; si\ x < -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} ; si\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = 2$$

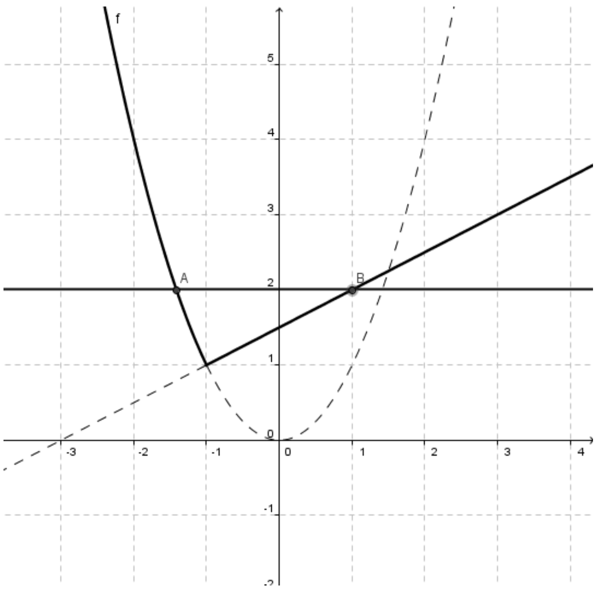
Il faut résoudre : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \quad ; si\ x < -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 2 \, ; si\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 1; si\ x \geq -1 \end{cases}$

On trouve donc 3 solutions mais que peut-on observer graphiquement ?



Il faut donc enlever la solution virtuelle $x = \sqrt{2}$ car $\sqrt{2} > -1$

Pourquoi trouve-t-on une solution supplémentaire ?



Il s'agit à nouveau d'une solution virtuelle que l'on peut voir si on continue les courbes sans restriction de domaine :

Conclusion : $f \cap g = \{(-\sqrt{2}; 2); (1; 2)\}$

➢ ***Notions élémentaires p.38 exercices 27 à 30***

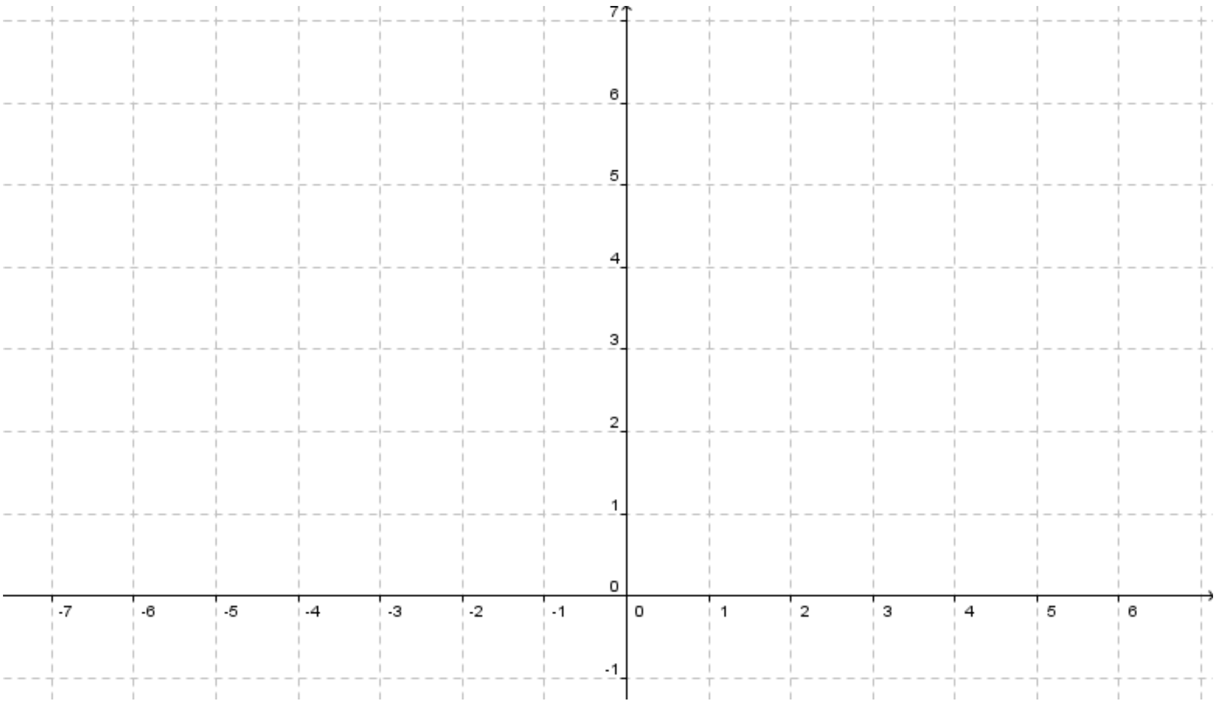
10. Fonction valeur absolue

Soit la fonction $f(x) = |x|$

Calculons quelques images

x	
$f(x)$	

Représentation graphique :



Comment définir $f(x)$ par morceaux ?

$$f(x) = \begin{cases} & , si\ x \\ & , si\ x \end{cases}$$

Remarque : On peut tracer la fonction $g(x) = x$ (donc la fonction f sans la valeur absolue) et ensuite tracer la symétrie de la partie qui passe en dessous de l'axe horizontal par l'axe de symétrie Ox)

Exercice : Calculer quelques images pour représenter la fonction $g(x) = |x + 1|$, la représenter et en donner la définition par morceaux.

➢ ***Notions élémentaires p.39 ex 32***

Table des matières