Exponentielle et Logarithme : Série 4

Exercice 1 : Résoudre algébriquement les équations en x suivantes :

1) $3^{7x-2} = 5^{8x-3}$
2) $4^{3x-5} = 6^{7x-12}$
3) $3^{5x+1} = 7^{12-5x}$
4) $4^{2x+3} = 2^{3x}$

Exercice 2 : Déterminer par calcul le domaine des applications définies par :

1) $f(x) = \ln[x \cdot (x-2)]$
2) $f(x) = \ln(x) + \ln(x-2)$
3) $f(x) = \ln(x^2 + 7x - 3)$
4) $f(x) = \log(\frac{1-x}{2x+3})$
5) $f(x) = \log[\frac{(3-5x)^2}{x^4}]$

Exercice 3 : Déterminer le domaine et résoudre.

1) $5x = x \cdot ln(x)$
2) $3 \cdot [\log(x)]^2 + \log(x) = 0$
3) $e^x \cdot \ln(x) = 3\ln(x)$
4) $4x = x \cdot \log(x-1)$
5) $(x^2 - 3x)\log(5) = \log(125)$
6) $\log(x-2) + 1 = \log(2x-1)$
7) $\ln(3-x) + 4 = \ln(x-5)$
8) $\log(7-2x) = 2 + \log(5x-1)$
9) $\ln(x) + \ln(2-x) = \ln(4-x)$
10) $\log(x) - \log(x+3) = 2 \cdot \log(2)$
11) $\log\left(\frac{x}{x+3}\right) = 2\log(2)$
12) $\log(3) + \log\left[(x-4)\left(x-\frac{5}{3}\right)\right] = 1$
13) $\ln(1+x) - 2\ln(2x-10) = -\ln(1+x)$
14) $\log(x^2 - 4x + 3) = \log(5-3x)$
15) $\ln(3-x) + \ln(2-x) = \ln(13+x)$
16) $3[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) - 2 = 0$
17) $3[\log(x)]^2 - 5\log(x) - 2 = 0$

Exercice 4 : Un nénuphar mesurant $1m^2$ double de surface chaque jour. Après 10 jours, il aura recouvert tout l'étang.

a) Quelle est la surface de l'étang ?
b) Faire une représentation graphique où x représente les jours et y la surface du nénuphar.
c) Donner l'équation de la fonction tracée en a).
d) Au bout de combien de jours le nénuphar aura recouvert la moitié de l'étang ?
e) Justifier le résultat du point d) en utilisant la fonction obtenue au point c).
f) Si le nénuphar avait une surface initiale de $3m^2$, combien de temps aurait-il pris pour recouvrir l'étang ? (réponse en jours, heures et minutes)

Exercice 5 : Problème de la limace

Une limace doit se rendre du point « 1 » au point « 0 ». Le premier jour, elle parcourt la moitié du trajet, le deuxième jour la moitié du reste et ainsi de suite.

a) Définir une fonction qui donne la distance parcourue en fonction des journées et faire son graphe.
b) Après combien de jours, la limace atteindra-t-elle le point $\frac{1}{262144}$?

Exercice 6 : Problème de l'Helvétie

En l'an 7, une région de l'Helvétie était peuplée par 64 indigènes. Si la population de cette région avait doublé chaque année, en quelle année le nombre d'habitants aurait-il été de 1'048'576 ?
(Définir une fonction « nombre d'habitant » et résoudre une équation).

Exercice 7 : On considère une colonie de bactéries dont la population $p(t)$ double toutes les 10 secondes.

a) Sachant qu'il y a 100 bactéries au temps $t = 0$, exprimer $p(t)$ où t est calculé en secondes.
b) Calculer la population après 10 secondes, 60 secondes et 120 secondes.
c) Au bout de combien de temps la population sera-t-elle égale à 1 000 000 ?

Solutions Série 4 Exponentielles et logarithmes

Ex1 : 1) $S = \left\{\frac{\log\left(\frac{9}{125}\right)}{\log\left(\frac{3^7}{5^8}\right)}\right\} \cong \{0{,}507\}$ 2) $S = \left\{\frac{\log\left(\frac{4^5}{6^{12}}\right)}{\log\left(\frac{4^3}{6^7}\right)}\right\} \cong \{1{,}73\}$ 3) $S = \left\{\frac{\log\left(\frac{7^{12}}{3}\right)}{\log(3^5 \cdot 7^5)}\right\} \cong \{1{,}46\}$
4) $S = \{-6\}$

Ex 2 :
1) $D_f =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R}\backslash[0; 2]$ 2) $D_f =]2; +\infty[$
3) $D_f = \mathbb{R}\backslash\left[\frac{-7-\sqrt{61}}{2}; \frac{-7+\sqrt{61}}{2}\right]$ 4) $D_f =]-\frac{3}{2}; 1[$ 5) $D_f = \mathbb{R}^*\backslash\left\{\frac{3}{5}\right\}$

Ex 3
1) $D = \mathbb{R}_+^*\ S = \{e^5\}$
2) $D = \mathbb{R}_+^*\ S = \{10^{-\frac{1}{3}}; 1\}$
3) $D = \mathbb{R}_+^*\ S = \{1; \ln(3)\}$
4) $D =]1; +\infty[\ S = \{10001\}$
5) $D = \mathbb{R}\ \ S = \left\{\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$
6) $D =]2; +\infty[\ S = \left\{\frac{19}{8}\right\}$
7) $D = \emptyset$ donc $S = \emptyset$
8) $D =]\frac{1}{5}; \frac{7}{2}[\ S = \left\{\frac{107}{502}\right\}$
9) $D =]0; 2[\ S = \emptyset$
10) $D = \mathbb{R}_+^*\ S = \emptyset$
11) $D =]-\infty; -3[\cup \mathbb{R}_+^*\ \ S = \{-4\}$
12) $D =]-\infty; \frac{5}{3}[\cup]4; +\infty[\ S = \left\{\frac{2}{3}; 5\right\}$
13) $D =]5; +\infty[\ S = \{11\}$
14) $D =]-\infty; 1[\ \ S = \{-1\}$
15) $D =]-13; 2[\ \ S = \{-1\}$
16) $D = \mathbb{R}_+^*\ \ S = \left\{e^2; \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right\}$
17) $D = \mathbb{R}_+^*\ \ S = \left\{10^2; \frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right\}$

Ex 5 : a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{262144} \Leftrightarrow 2^x = 262144 = 2^{18}$
La limace atteindra le point en 18 jours.

Ex6 : a) $f(x) = 2^{x-1}$ b) $2^{x-1} = 1048576 = 2^{20}$ donc $x = 21$
En l'an 21, le nombre d'habitants aurait été de 1'048'576

Ex7 :
a) $p(t) = 100 \cdot 2^{t/10}$ b) $p(10) = 200; p(60) = 6400; p(120) = 409600$ c) $132{,}88\ sec.$