Série 6 Exponentielles et logarithmes

Exercice 1:

La pression atmosphérique.

La pression atmosphérique P à une altitude h se calcule de la manière suivante :

$\boxed{P(h) = P_0 \cdot e^{-kh}}$ P_0 est la pression au niveau de la mer ; h est l'altitude, en mètres ;

$k = 1,25 \cdot 10^{-4}$ $[1/m]$ est une constante.

a) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale à la moitié de P_0 ?

b) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale au cinquième de P_0 ?

Exercice 2:

La culture de bactéries.

Le nombre de bactéries d'une culture suit la loi suivante :

$\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$ N_0 est le nombre initial de bactéries ; t est le temps, en jours.

a) Déterminez N_0 et a sachant que la culture comprend 200'000 bactéries après 3 jours, et 1,6 millions après 4,5 jours.

b) Quel sera le nombre de bactéries après 5 jours ?

c) Après combien de temps la colonie comptera-t-elle 5 millions de bactéries ?

Exercice 3:

La désintégration du Berkélium.

Le nombre d'atomes de Berkélium contenu dans un corps diminue selon une loi exponentielle :

$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, où N_0 égale le nombre d'atomes de Berkélium au temps $t = 0$.

$N(t)$ = le nombre d'atomes de Berkélium au temps t et $\lambda = 0,1485$ [1/heures].

a) Quel est le temps nécessaire pour que la radioactivité diminue de moitié?

b) Au bout de combien de temps la radioactivité aura-t-elle diminuée de 99% ?

Exercice 4:

L'ancêtre généreux.

Si votre ancêtre préféré avait placé à la naissance de Jésus Christ un sesterce (équivalent à un centime actuel) sur un compte épargne à 2%, juste pour vous. (Sans frais bancaires)
A combien s'élèverait votre compte en banque en l'an 2010 ?

Corrigé Série 6 Exponentielles et logarithmes

❶ La pression atmosphérique.

a) On cherche h tel que $P(h) = P_0 \cdot e^{-k \cdot h} = P_0 / 2$; donc $e^{-k \cdot h} = 1/2$; On prend le ln :
$-k \cdot h = \ln(1/2) = -\ln(2)$, donc $h = \ln(2) / 0{,}000125$ [m^{-1}] $\approx$ 5'545 mètres.
A environ 5'545 mètres la pression égale la moitié de la pression au niveau de la mer.

b) On cherche h tel que $P(h) = P_0 \cdot e^{-k \cdot h} = P_0 / 5$; donc $e^{-k \cdot h} = 1/5$; On prend le ln :
$-k \cdot h = \ln(1/5) = -\ln(5)$, donc $h = \ln(5) / 0{,}000125$ [m^{-1}] $\approx$ 12'876 mètres.
A environ 12'876 mètres la pression égale le cinquième de la pression au niveau de la mer.

❷ La culture de bactéries.

a) On sait que : $N_0 \cdot a^3 = 200'000$ et $N_0 \cdot a^{4,5} = 1'600'000$
En divisant les deux équations, on élimine l'inconnue N_0 : $a^{4,5} / a^3 = 1'600'000 / 200'000$
$a^{4,5-3} = 8$; $a^{1,5} = 8$; $a^{3/2} = 8$; $a = 8^{2/3} = 4$
Maintenant, il est facile de déterminer la valeur de N_0.
$N_0 = 200'000 / 4^3 = 200'000 / 64 = 3'125$.
Vérifions avec la deuxième équation : $N_0 = 1'600'000 / 4^{4,5} = 1'600'000 / 512 = 3'125$.
Donc $N(t) = 3'125 \cdot 4^t$.

b) Après 5 jours, le nombre de bactéries sera de : $N(5) = 3'125 \cdot 4^5 = 3'200'000$

c) On cherche t pour avoir $N(t) = 3'125 \cdot 4^t = 5'000'000$. On divise par 3'125 et on prend le log.
$t \cdot \ln(4) = \ln(5'000'000 / 3'125)$. La base n'a pas d'importance.
$t = \ln(5'000'000 / 3'125) / \ln(4) \approx 5{,}322$ jours $\approx$ 5 jours 7 heures 43 minutes
Après environ 5 jours 7 heures et 43 minutes la colonie comptera 5 millions de bactéries.

❸ La désintégration du Berkélium.

Le nombre d'atomes de Berkélium contenu dans un corps diminue selon une loi exponentielle :
$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, avec $\lambda = 0{,}1485$ [1/heures]

a) On cherche t tel que : $N(t) = N_0 / 2 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. L'équation devient : $1/2 = e^{-\lambda \cdot t}$
On prend le logarithme naturel : $\ln(1/2) = -\lambda \cdot t = -0{,}1485 \cdot t$, donc
$t = \dfrac{\ln(1/2)}{-0{,}1485} = \dfrac{\ln(2)}{0{,}1485} \approx 4{,}667$ heures $\approx$ 4 heures et 40 minutes.
Après 4 heures et 40 minutes, il ne restera plus que la moitié de la quantité initiale de Berkélium.

b) On cherche t tel que : $N(t) = 0{,}01 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. L'équation devient : $0{,}01 = e^{-\lambda \cdot t}$
On prend le logarithme naturel : $\ln(0{,}01) = -\lambda \cdot t = -0{,}1485 \cdot t$, donc
$t = \dfrac{\ln(0{,}01)}{-0{,}1485} = \dfrac{\ln(100)}{0{,}1485} \approx 31{,}011$ heures $\approx$ 31 heures et 40 secondes.
Après 31 heures et 40 secondes, il ne restera plus que 1% de la quantité initiale de Berkélium.

❹ L'ancêtre généreux.

En l'an 1, le compte d'épargne aurait $1 + 0{,}02 \cdot 1$ centimes $= 1{,}02$ centimes.
En l'an 2, le compte d'épargne aurait $1{,}02 + 0{,}02 \cdot 1{,}02 = 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 1{,}02^2$ centimes.
En l'an 3, le compte d'épargne aurait $1{,}02^2 + 0{,}02 \cdot 1{,}02^2 = 1{,}02^2 \cdot 1{,}02 = 1{,}02^3$ centimes.
En l'an 4, le compte d'épargne aurait $1{,}02^3 + 0{,}02 \cdot 1{,}02^3 = 1{,}02^3 \cdot 1{,}02 = 1{,}02^4$ centimes.
En continuant ainsi, on constate que :
En l'an 2010, le compte d'épargne aurait $1{,}02^{2010}$ centimes.
Avec la calculatrice on vérifie que ce nombre vaut environ $1{,}9335 \cdot 10^{17}$ centimes.
Ceci fait plus de 1,9 millions de milliards de francs.
Dommage pour vous que cet ancêtre n'ait pas existé ...