Fonctions Rationnelles Série 1

Ne pas écrire sur l'énoncé !

Exercice 1 :

Simplifier au maximum les fractions rationnelles suivantes, en donnant à chaque fois le domaine de définition :

a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

b) $\frac{4x^2+8x-12}{x^2-6x+5}$

c) $\frac{u^4-1}{u^3-u}$

d) $\frac{y^3+7y^2+6y}{y^2-2y-3}$

Exercice 2 :

Effectuer les opérations puis simplifier au maximum les fractions rationnelles obtenues, en donnant à chaque fois le domaine de définition.

a) $\frac{x^4-16}{x+2} \cdot \frac{2}{4x-2x^2}$

b) $\frac{a^2a^2-25}{16a^3-a} \cdot \frac{4a^2+a}{a^2+5}$

c) $\frac{a^2-4}{(4a^2)^2} \div \frac{a+2}{2a}$

d) $\frac{4}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-1}$

e) $\frac{2-2x}{2+3x} - \frac{2+3x}{2-3x}$

f) $\frac{3}{2z-1} + \frac{8z}{4z^2-1} - \frac{2}{2z+1}$

Exercice 3 :

a) Reprendre les fractions de l'exercice 1, indiquez, si elles existent, les asymptotes verticales de ces fonctions ainsi que les valeurs de x non définies qui induisent un "trous" dans leur graphique.

b) Proposer l'expression algébrique d'une fonction avec les caractéristiques suivantes :

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5;\ 3\}$, qui admet une A.V. de droite $x = -5$
2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\,;2\}$, qui n'admet une aucune A.V.
3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;0;3\}$, qui admet deux A.V. de droites : $x = -1$ et $x = 3$
4) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$, qui admet une A.V. de droite $x = 2$

Exercice 4 :

Reprendre les fractions de l'exercice 1, indiquez, si elles existent, les asymptotes horizontales de ces fonctions.

Exercice 5 :

Pour les fonctions suivantes déterminer leur domaine de définition, puis déterminer si elles existent, les asymptotes horizontales et verticales de leur graphique.

a) $f(x) = \frac{3}{x-4}$

b) $g(x) = \frac{-3}{x+3}$

c) $h(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$

d) $i(x) = \frac{16x^2-25}{4x^2-5x}$

Exercice 6 :

Proposer l'expression algébrique d'une fonction avec les conditions suivantes :

- de domaine : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\,;2\}$,
- qui admet deux A.V. de droite $x = 1$ et $x = 2$
- qui admet une A.H. de droite $y = 1$.

Exercice 7 :

Déterminer l'équation de l'asymptote oblique des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{2x^2-x-3}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{8-x^3}{2x^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-9}$

Exercice 8 :

Déterminer les équations des asymptotes verticales des fonctions de l'exercice 7.

Exercice 9 :

Simplifier les fractions suivantes et déterminer leurs éventuelles asymptotes (verticale, horizontale, oblique) :

a) $f(x) = \frac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

e) $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$

f) $f(x) = \frac{x+2}{4-x^2}$

Corrigé Fonctions Rationnelles : Série 1

Exercice 1 :

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $\frac{x-2}{x+2}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$, $\frac{4(x+3)}{x-5}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0;\ -1; 1\}$, $\frac{u^2+1}{u}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$, $\frac{y(y+6)}{y-3}$

Exercice 2 :

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$, $\frac{-(x^2+4)}{x}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right\}$, $\frac{a^2-5}{4a-1}$

c) $D = \mathbb{R}\ \{-2\,; 0\}$, $\frac{a-2}{8a^3}$

d) $D = \mathbb{R}\ \{-1; 1; 2\}$, $\frac{6x}{(x-2)(x-1)(x+1)}$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\,; \frac{2}{3}\right\}$, $\frac{-x(22+3x)}{(2+3x)(2-3x)}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right\}$, $\frac{5}{2z-1}$

Exercice 3 :

a)

1) La fonction admet une A.V. de droite $= -2$, son graphique comporte un trou en $x = 2$ (car $f(2)$ n'est pas défini ; $2 \notin Domaine$)
2) La fonction admet une A.V. de droite $= 5$, son graphique comporte un trou en $x = 1$
3) La fonction admet une A.V. de droite $x = 0$,son graph comporte un trou en $x = -1, et\ x = 1$
4) La fonction admet une A.V. de droite $= 3$, son graphique comporte un trou en $x = -1$

b) Les fonctions ci-dessous sont des exemples, il existe d'autres solutions

1) $f(x) = \frac{x-3}{(x+5)(x-3)}$
2) $f(x) = \frac{3x^2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$
3) $f(x) = \frac{x}{x(x-3)(x+1)}$
4) Impossible ! Si la droite $x = 2$ est une asymptote verticale de f, la fonction est non définie en $x = 2$ or ici $2 \in D_f$ (→ impossible !).

Exercice 4 :

a) La fonction admet une A.H. de droite $y = 1$

b) La fonction admet une A.H. de droite $y = 4$

c) La fonction n'admet pas d'A.H.

d) La fonction n'admet pas d'A.H.

Exercice 5 :

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, f admet une A.V. de droite $= 4$, et une A.H. de droite $y = 0$ $(n < k)$
b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, f admet une A.V. de droite $= -3$, et une A.H. de droite $y = 0$ $(n < k)$
c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,; 2\}$, f admet une A.V. de droite $x = -3$, et une A.H. de droite $y = 1(n = k)$
d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{5}{4}\right\}$, f admet une A.V. de droite $x = 0$, et une A.H. de droite $y = 4$ $(n = k)$

Exercice 6 :

Une fonction possible: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

Exercice 7 :

a) $y = x - 2$
b) $y = 2x + 3$
c) $y = -\frac{1}{2}x$
d) $y = x$

Exercice 8 :

a) $x = -1$
b) $x = 2$
c) $x = 0$
d) $x = -3 \ \ et\ x = 3$

Exercice 9 :

a) $y = 2\,; x = -1$
b) $y = 0\,; x = -1$
c) $y = x - 1$
d) $y = 1 : x = \ -1$
e) $y = 1\,; x = \ -1$
f) $y = 0\,; x = 2$