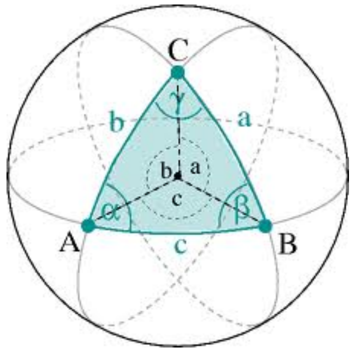
Chapitre : Géométrie

0. Introduction : Qu'est-ce que la géométrie ?

Ce mot vient du grec et signifie à peu près « **mesure de la terre** », à comprendre dans le sens « mesure des champs ». Au début, elle servait à mesurer la taille de champs à cultiver et les dimensions de certains objets. Par exemple, quelle est la longueur du cerceau métallique qui entoure un tonneau d'un diamètre connu ?

Au VIème siècle avant J.-C., Thalès de Milet déduit la hauteur de la grande pyramide de Kheops par un raisonnement géométrique. Plus tard les Grecs ont étudié de façon plus abstraite les propriétés des figures dans un plan. C'est la naissance des mathématiques rigoureuses : on cherche à démontrer certaines formules, on ne se contente plus de simplement les utiliser. Depuis cette époque, la géométrie s'est beaucoup développée et ne se limite plus à l'étude de figures dans un plan, mais s'occupe aussi de l'étude d'objets dans l'espace de dimension trois, et même de dimension supérieure à trois. Elle généralise l'étude de figures dans un plan à l'étude de figures dans une surface courbe. Par exemple, il est utile d'étudier les propriétés de figures, par exemple un triangle, sur la surface de la terre : la somme des angles d'un triangle n'est plus 180° !



De plus en plus abstraites, les mathématiques permettent même de définir un espace courbe de dimension trois, quatre ou plus. Ces travaux ont été utiles pour développer la théorie de la relativité générale.

Dans tout ce qui suit, nous nous limiterons à la ***géométrie euclidienne plane*** qui nous vient du grec Euclide (330 -276 av. J.-C.), auteur d'un ouvrage « Les Éléments », qui réunit à la fois ses propres découvertes et aussi les principaux faits connus de son temps aussi bien en géométrie qu'en arithmétique. La valeur toute particulière que nous accordons à cet ouvrage est l'utilisation systématique du **raisonnement déductif**.

Les chapitres que nous allons étudier sont les suivants :

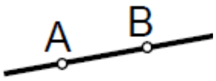
1. Longueurs, surfaces et volumes
2. Terminologie et propriétés des angles
3. Types de triangles, droites remarquables du triangle
4. Théorème de Thalès, Euclide, Pythagore et de la Hauteur

1. Longueurs, surfaces et volumes

Point : Le plus petit élément constitutif de l'espace géométrique. Il n'a aucune dimension, longueur, largeur, épaisseur, volume ou autre.
Sa seule caractéristique est sa position.

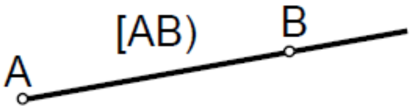
Droite : Ensemble infini de points.
Par deux points : il existe une seule droite qui passe, elle est infinie.

Illustration :



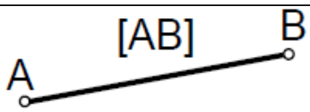
Demi-droite : Partie infinie d'une droite, limitée par un point

Illustration :



Segment de droite : Partie finie d'une droite, limitée par deux points appelés extrémités du segment

Illustration :



Distances, longueurs : Etant donnés deux points A et B, il est possible de leur associer un nombre positif appelé distance entre A et B

Notation : $\overline{AB}$

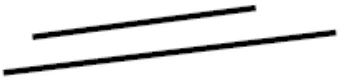
Droites sécantes : Deux droites distinctes sont dites sécantes si elles possèdent un point commun

Illustration :

Droites parallèles : Deux droites distinctes sont dites parallèles si elles ne possèdent aucun point commun

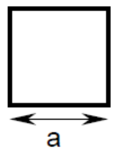
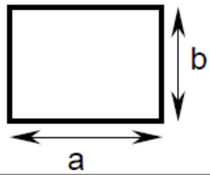
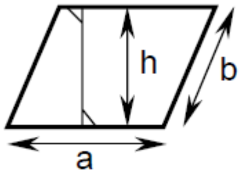
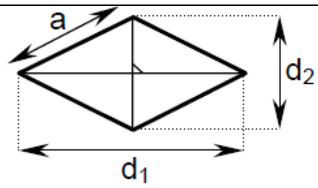
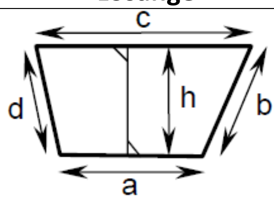
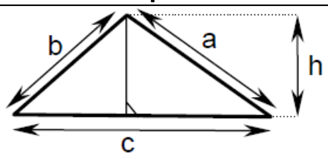
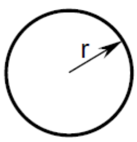
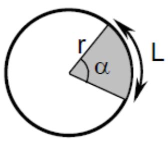
Notation : $d \,//\, d'$

Illustration :



Remarque : cette définition ne marche pas sur la sphère ! (deux droites parallèles se croisent aux pôles)

Polygone : Une forme géométrique qui comporte des sommets reliés par des segments de sorte qu'un sommet soit toujours relié à un autre sommet.

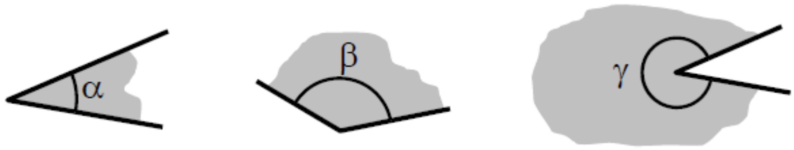
Figure	Propriété/Description	Périmètre	Aire
Carré 	Un **quadrilatère** (polygone à 4 côtés) ayant 4 côtés **isométriques** (même mesure) Et 4 angles droits	$P = 4a$	$A = a^2$
Rectangle 	Un quadrilatère ayant 4 angles droit et 2 pairs de côtés parallèles	$P = 2(a+b)$	$A = a \cdot b$
 **Parallélogramme**	Un quadrilatère ayant 2 pairs de côtés parallèles	$P = 2(a+b)$	$A = a \cdot h$
 **Losange**	Un quadrilatère ayant 4 côtés isométriques et les diagonales se coupent à angle droit	$P = 4a$ $a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$	$A = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$
 **Trapèze**	Un quadrilatère ayant 1 paire de côtés parallèles	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2}(a+c) \cdot h$
 **Triangle**	Un polygone à 3 sommets et 3 côtés	$P = a + b + c$	$A = \frac{1}{2} c \cdot h$
Cercle 	Tous les points du disque sont à même distance du centre	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$	$A = \pi \cdot r^2$
Secteur circulaire 	Partie d'un disque *(très utile en trigonométrie, surtout en 2e)*	$P = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi \cdot r + 2r$	$\frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{\alpha}{360}$ Donc : $A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

➢ ***Géométrie Série 1 exercice 1***

2. Terminologie et propriétés des angles

Angle : Portion de plan limitée par deux demi-droites de même origine.

Illustration :

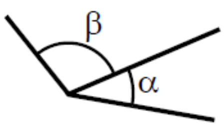


Angle plat : Si les deux demi-droites qui le définissent sont dans le prolongement l'une de l'autre.

Illustration :

Angles adjacents : S'ils ont le sommet commun, une demi-droite commune et s'ils sont situés d'une part et d'autre de cette demi-droite.

Illustration :



Angle droit : Si les deux demi-droites qui le définissent sont perpendiculaires.

Illustration :

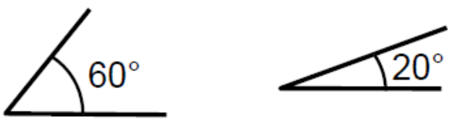
Angles isométriques : S'ils sont superposables. Deux angles isométriques ont la même mesure

Mesure d'angle : le degré, le radian, le grade
degré = 90^e partie d'un angle droite.

Notation : minuscule pour l'angle et sa mesure : lettre grecque

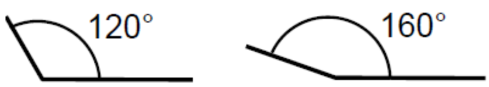
Angle aigu : Si sa mesure est plus petite que 90°

Illustration :



Angle obtus : Si sa mesure est plus grande que 90°.

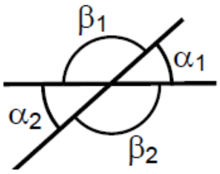
Illustration :



Angles complémentaires : Si la somme de leurs mesures vaut 90°.

Angles supplémentaires : Si la somme de leurs mesures vaut 180°

Angles opposés par le sommet : (voir illustration)

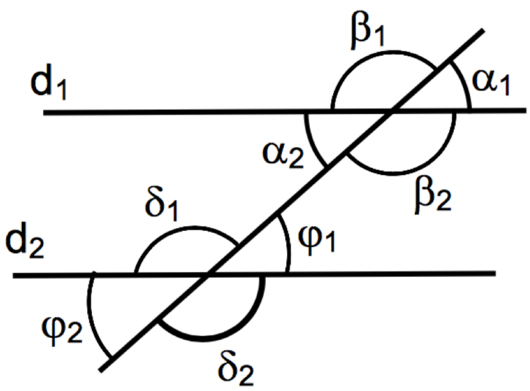


α_1 *et* α_2 sont opposés par le sommet

ainsi que β_1 *et* β_2

Angles correspondants, angles alternes-internes, angles alternes-externes :

(voir illustration)



Les paires d'angles : α_1 et φ_2, β_1 et δ_2 sont **alternes-externes**.
Les paires d'angles : α_2 et φ_1, β_2 et δ_1 sont **alternes-internes**.
Les paires d'angles : α_1 et φ_1, α_2 et φ_2,
β_1 et δ_1, β_2 et δ_2 sont **correspondants**.

Alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha
β	B	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε ou ϵ	E	epsilon
ζ	Z	zêta
η	H	êta
θ ou ϑ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	ksi ou xi
o	O	omicron
π ou ϖ	Π	pi
ρ ou ϱ	P	rho
σ ou ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
φ ou ϕ	Φ	phi
χ	X	khi ou chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	oméga

Propriétés :

- Des angles opposés par le sommet sont toujours de même grandeur.
- La somme des angles d'un triangle est de 180°.
- Si les droites d_1 et d_2 sont parallèles, alors les angles alternes-externes, alternes-internes et correspondants sont de même grandeur.

  Réciproquement :
- Si deux angles d'une des paires ci-dessus sont de même grandeur, alors d_1 et d_2 sont parallèles.

Remarque : Deux angles de même nom sont isométriques.

➢ ***Géométrie, Série 1 Exercice 2-10***

3. Triangle

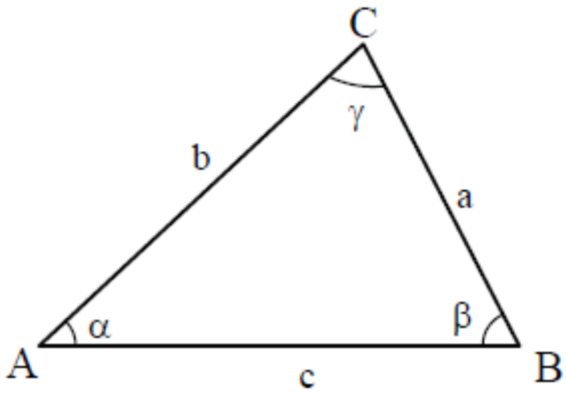
Définition : **Un triangle** est un polygone à trois côtés.

Pour désigner ses différentes composantes, on utilise les conventions suivantes :

- Les lettres majuscules désignent les **sommets** du triangle (souvent A,B, C), ils sont placés dans l'ordre inverse du sens des aiguilles d'une montre

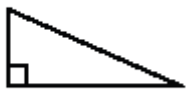
- Les lettres minuscules désignent les **côtés** ou leur **longueur**, le côté a est le côté qui est opposé au sommet A, le côté b est le côté qui est opposé au sommet B, etc.

- Les lettres minuscules grecques désignent les **angles**, l'angle α (alpha) se trouve au sommet A, l'angle β (bêta) au sommet B et l'angle γ (gamma) au sommet C.

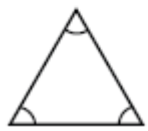


1) Types de triangles

Trois types de triangles portent un nom particulier :

- Un triangle **rectangle** qui possède un angle droit. 

- Un triangle **isocèle** est un triangle qui possède au moins 2 angles égaux (⇔ 2 côtés égaux). 

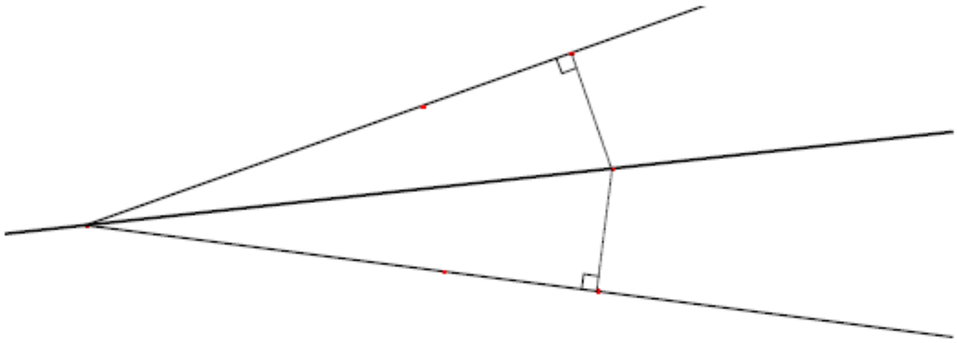
- Un triangle **équilatéral** est un triangle qui possède 3 angles égaux (⇔ 3 côtés égaux). 

Si un triangle n'est ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral, on dit qu'il est **quelconque**.

2) Droites remarquables du triangle

Bissectrices :

Définition : On appelle **bissectrice** d'un angle la droite qui coupe l'angle en deux angles égaux

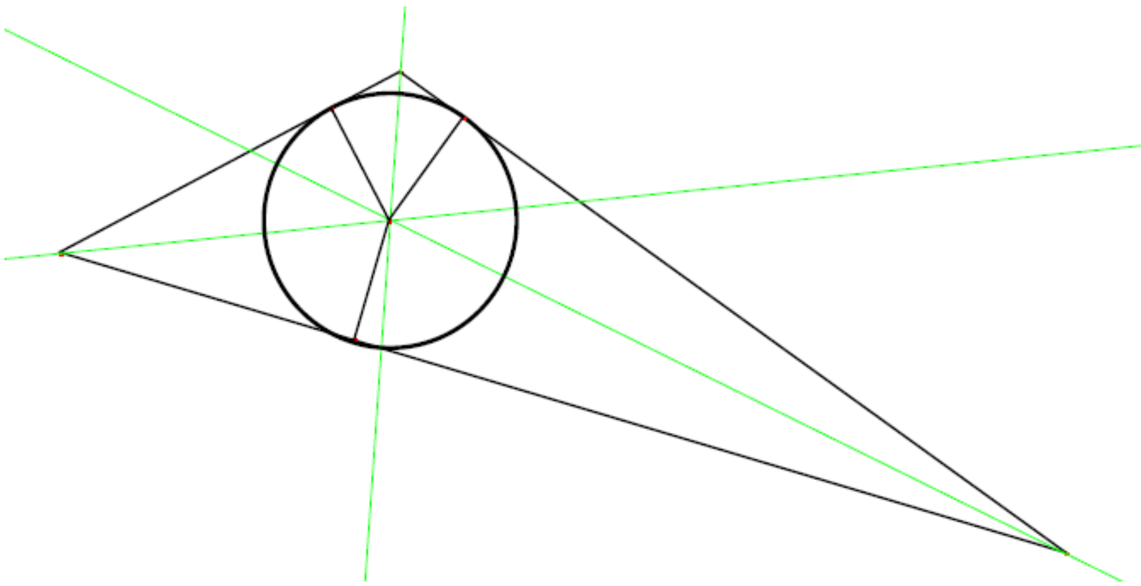


Propriété :

a) La bissectrice est l'axe de symétrie de l'angle
b) Tout point de la bissectrice est équidistant des côtés de l'angle

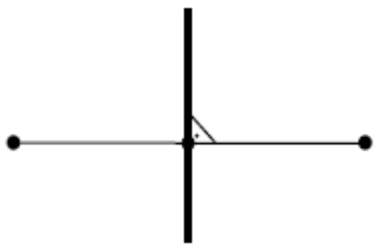
Application aux trois angles d'un triangle :

a) Un triangle possède trois bissectrices intérieures.
b) Elles se coupent en un même point qui est le centre du **cercle inscrit** du triangle.



Médiatrices :

Définition : On appelle **médiatrice** d'un segment de droite, la droite perpendiculaire au segment en son milieu.

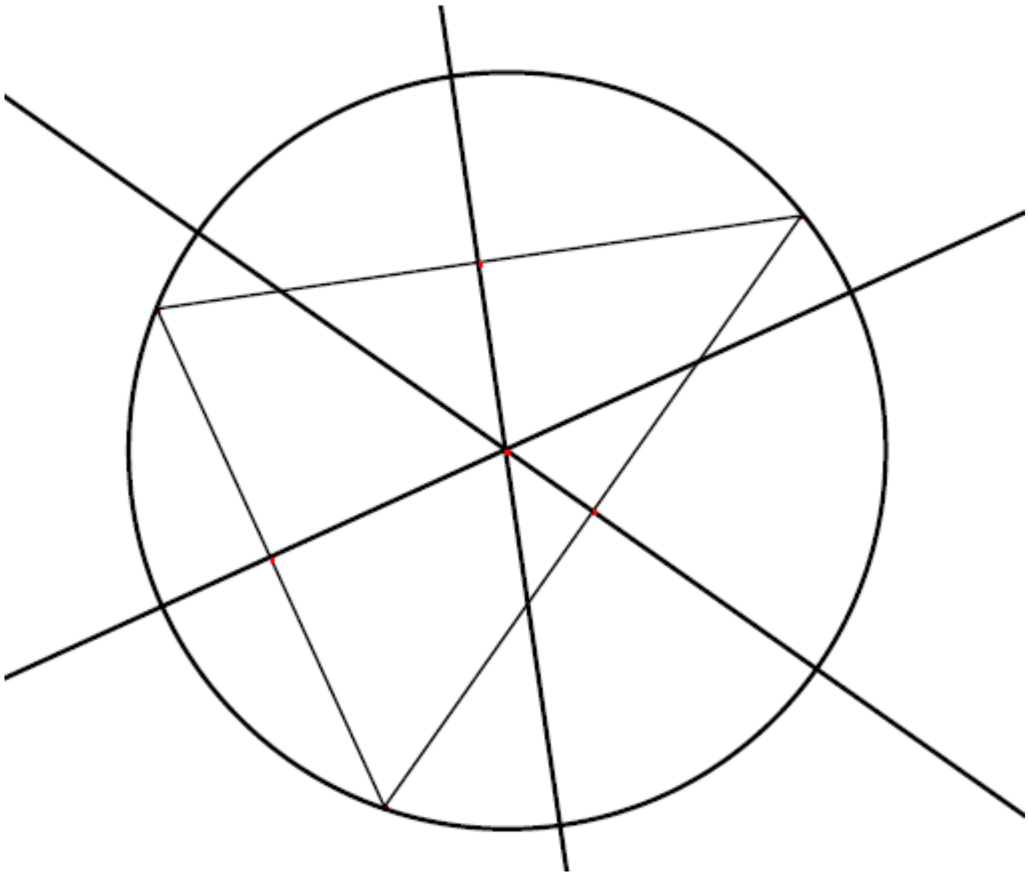


Propriétés :

a) La médiatrice est l'axe de symétrie du segment de droite.
b) Tout point de la médiatrice d'un segment de droite est équidistant de ses deux extrémités.

Application aux trois côtés d'un triangle :

a) Un triangle possède trois médiatrices.
b) Elles se coupent en un même point qui est le centre du **cercle circonscrit** au triangle.

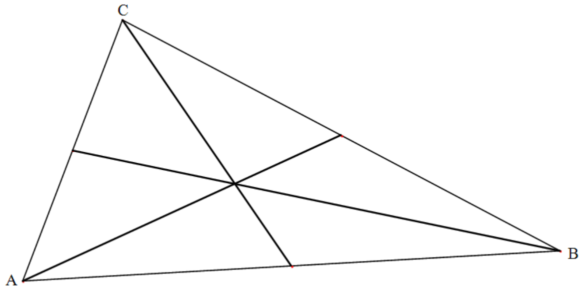


Médianes :

Définition : On appelle **médiane** d'un triangle, un segment qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé.

<u>Placer les points D,E,F :</u>

D est le milieu du segment [AC]
E est le milieu du segment [AB]
F est le milieu du segment [BC]



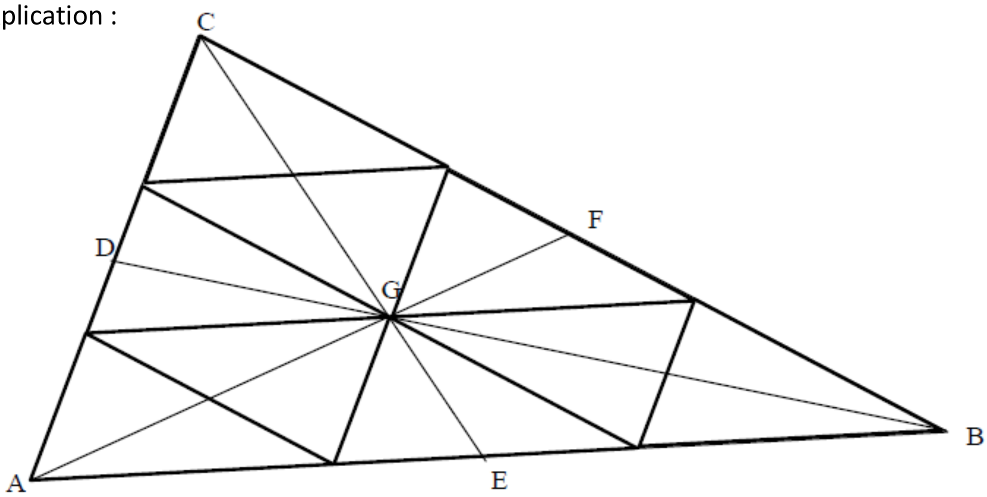
Propriétés :

a) Un triangle possède trois médianes.

b) Les médianes d'un triangle se coupent en un même point G appelé centre de gravité du triangle.

c) La distance GA est le double de la distance GF
La distance GB est le double de la distance GD
La distance GC est le double de la distance GE.

Explication :



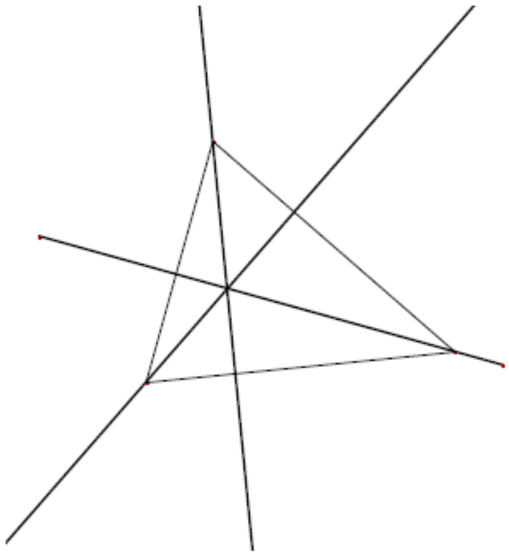
En traçant neuf triangles semblables au triangle ABC, de dimensions trois fois plus petites, comme dans le dessin ci-dessus, les propriétés deviennent évidentes. Les médianes du triangles ABC sont aussi des médianes des plus petits triangles, dont six ont un sommet qui se trouve au point G. (Par application du théorème de Thalès.)

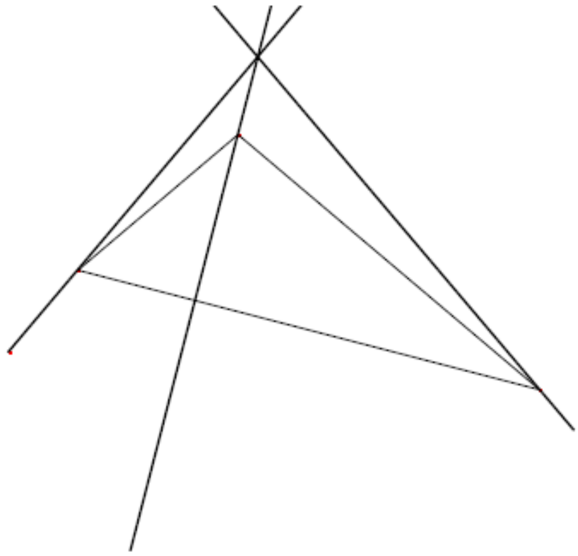
De plus, la distance GA est le double de GF. car le segment GA traverse deux triangles, alors que le segment GF n'en traverse qu'un seul.
De même pour GB et GC.

Hauteurs d'un triangle :

Définition : On appelle **hauteur** d'un triangle, une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Les hauteurs ne se trouvent pas nécessairement à l'intérieur du triangle.





Propriétés :

a) Un triangle possède trois hauteurs.

b) Les hauteurs d'un triangle se coupent toutes en un même point, appelé orthocentre du triangle.

➤ ***Géométrie Série 2***

4. Théorèmes

1) Théorème de Pythagore

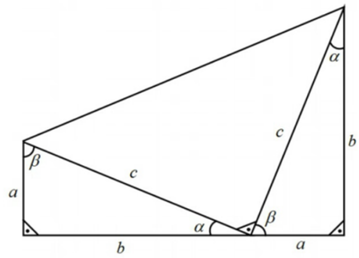
Pythagore de Samos, né à Samos en environ 580 avant JC, décédé en Italie en environ 500 avant JC.

Théorème de Pythagore :

Si un triangle possède un angle droit,

Alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Illustration :



Démonstration : Calculons l'aire de ce trapèze de deux façons différentes

$$Aire\ du\ trapèze = Addition\ de\ l'aire\ de\ 3\ triangles$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+b)}{2} = 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Réciproque : Dans un théorème, il y a une hypothèse et une conclusion. Si l'on inverse l'hypothèse et la conclusion, on obtient une nouvelle assertion, appelée **réciproque**, qui peut être vraie ou fausse.

Ici, la réciproque est vraie :

Réciproque du Théorème de Pythagore :

Si le carré d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,

Alors ce triangle est un triangle rectangle.

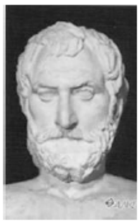
➢ ***Géométrie Série 3***

2) Théorème de Thalès

Thalès de Milet, (environ : 625-547 av. J.-C.) était un mathématicien, astronome, physicien et philosophe grec.

Théorème de Thalès :

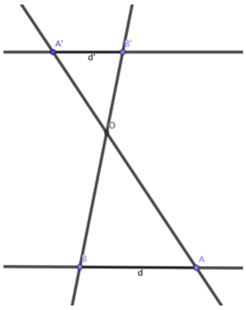
Soit un triangle OAB et une droite d coupant la demi-droite $[OA)$ en A' et la demi-droite $[OB)$ en B'

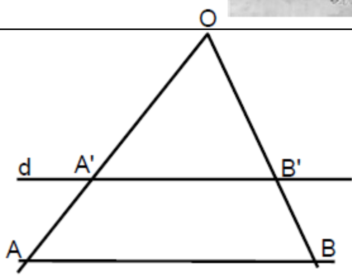


Si d est parallèle à la droite (AB)

Alors : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$

Illustration :





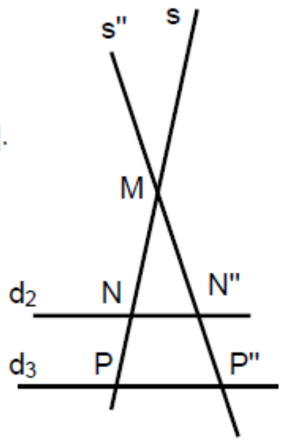
Réciproque du théorème de Thalès :

Soit un triangle OAB et une droite d coupant la demi-droite $[OA)$ en A' et la demi-droite $[OB)$ en B'

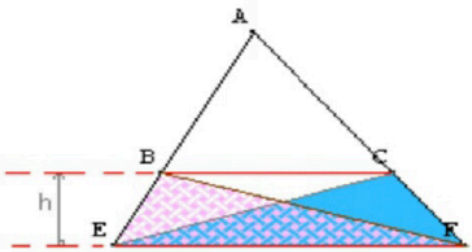
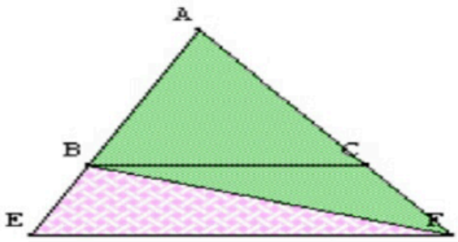
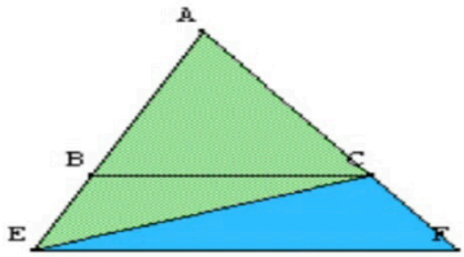
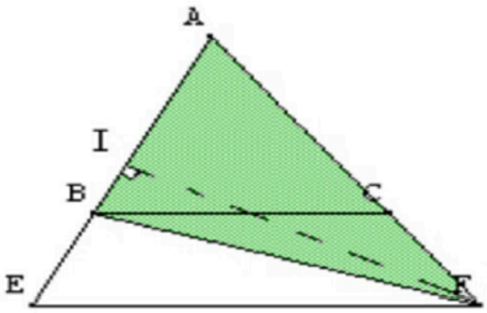
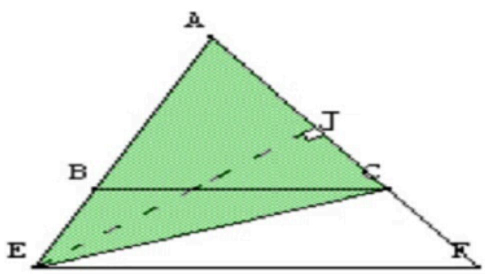
Si $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$

Alors d est parallèle à la droite (AB).

Exemple 1 :
d_2 est parallèle à d_3.
M, N, N", P et P" sont les intersections indiquées sur le schéma.
Sachant que : MN = 7 [cm] ; MN" = 9 [cm] ; NN" = 5 [cm] et MP = 13 [cm].
Que valent les longueurs : MP" et PP" ?



Démonstration du théorème de Thalès : (la première démonstration du théorème de Thalès est due à Euclide, dans le livre VI de ses *Éléments*) :

	Les aires des triangles BEF et CEF sont égales et valent toutes deux $\frac{(EF\cdot h)}{2}$.
	Or $\text{aire}(ABF)=\text{aire}(AEF)-\text{aire}(BEF)$,
	et de même $\text{aire}(ACE)=\text{aire}(AEF)-\text{aire}(CEF)$. Donc, $\text{aire}(ABF)=\text{aire}(ACE)$. Nous allons exploiter ces égalités sur les aires.
	En utilisant la hauteur (FI), on trouve que : ▪ $\text{aire}(ABF)=\frac{(AB\cdot FI)}{2}$ ▪ $\text{aire}(AEF)=\frac{(AE\cdot FI)}{2}$ On a donc : $\frac{\text{aire}(ABF)}{\text{aire}(AEF)}=\frac{AB}{AE}$ (1)
	De même, en utilisant la hauteur (EJ), on trouve : $\frac{\text{aire}(ACE)}{\text{aire}(AEF)}=\frac{AC}{AF}$ (2) Mais (1) et (2) sont égales, on trouve alors le théorème de Thalès.

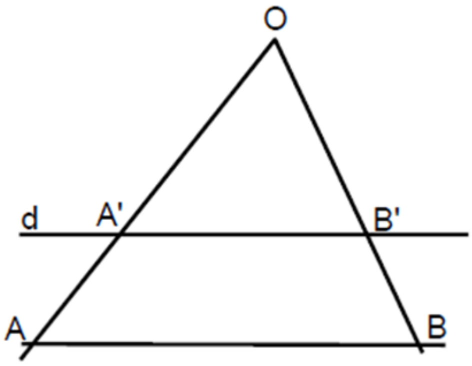
➢ ***Géométrie Série 4***

Remarques importantes pour le Théorème de Thalès :

A partir du Théorème de Thalès, on peut trouver une autre égalité. Pour la découvrir, repartons de l'énoncé :

Théorème de Thalès :

Soit un triangle OAB et une droite d coupant la demi-droite $[OA)$ en A' et la demi-droite $[OB)$ en B' <u>Si</u> d est parallèle à la droite (AB) <u>Alors :</u> $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$



Remarque 1 : Les égalités restent juste avec les fractions de l'énoncé inversées :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

Remarque 2 : On peut écrire $OA = OA' + A'A$ et $OB = OB' + B'B$

Remarque 3 : En prenant une partie de l'énoncé : $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ et la remarque 2, on peut trouver une nouvelle égalité:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA' + A'A}{OA'} = \frac{OB' + B'B}{OB'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA'}{OA'} + \frac{A'A}{OA'} = \frac{OB'}{OB'} + \frac{B'B}{OB'}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{A'A}{OA'} = 1 + \frac{B'B}{OB'}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A'A}{OA'} = \frac{B'B}{OB'}$$

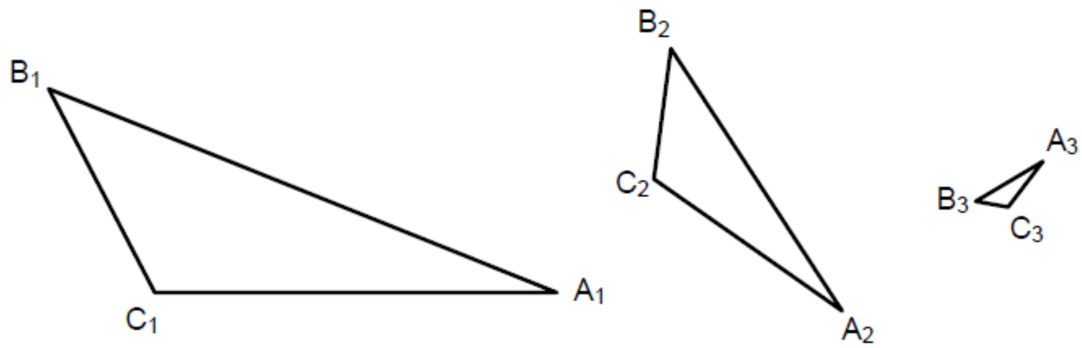
$$\Leftrightarrow \frac{OA'}{A'A} = \frac{OB'}{B'B}$$

Attention ! Lorsque nous pouvons utiliser cette dernière égalité, nous avons une formule pour deux côtés du triangle mais en l'utilisant, pas moyen d'insérer les côtés $A'B'$ et AB ! Il faut donc utiliser l'énoncé général pour avoir une égalité de rapports avec les trois côtés des triangles.

3) Triangles semblables

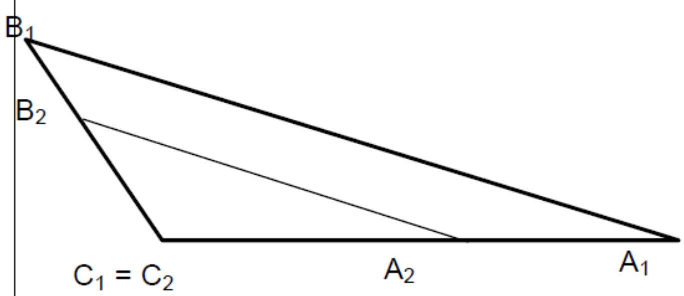
Définition : Deux triangles sont **semblables** si leurs trois angles sont respectivement égaux.

<u>Exemple :</u>
Ces trois triangles sont semblables car
l'angle en A_1 égale l'angle en A_2 qui égale l'angle en A_3 et
l'angle en B_1 égale l'angle en B_2 qui égale l'angle en B_3 et
l'angle en C_1 égale l'angle en C_2 qui égale l'angle en C_3.



<u>Application aux triangles semblables.</u>

Par glissement, grâce à l'égalité respective de leurs trois angles, on peut amener le triangle $A_2B_2C_2$ à l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$, dans une position qui permet l'utilisation du théorème de Thalès :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>L'égalité des angles garantit le parallélisme des segments A_2B_2 et A_1B_1 qui est l'hypothèse du théorème de Thalès.

Ce théorème nous permet d'affirmer :

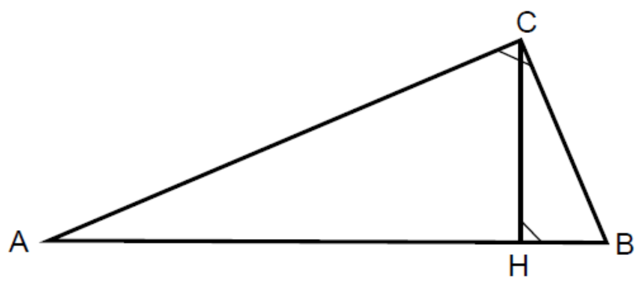
$\frac{C_2A_2}{C_1A_1} = \frac{C_2B_2}{C_1B_1} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1}$.
Ces quotients sont appelés :
"rapport de similitude des deux triangles"</td>
</tr>
</table>

Pour mieux se repérer dans des triangles semblables, on parle d'angles homologues :
ce sont les paires d'angles égaux, par exemple $\widehat{C_2B_2A_2} = \widehat{C_1B_1A_1}$ ou $\widehat{B_2C_2A_2} = \widehat{B_1C_1A_1}$.

➢ ***Géométrie Série 5***

4) Théorème de la Hauteur

Vérifions que les triangles ABC, CBH et ACH sont semblables :



A l'aide de la similitude des triangles ACH et CBH, on peut écrire :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$$

Avec la deuxième égalité, on peut obtenir :

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{CH^2 = AH \cdot HB}$ C'est le théorème de la hauteur.

Le carré de la hauteur issue de l'angle droit est égal au produit des deux longueurs qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

5) Théorème d'Euclide

Avec la similitude des triangles CBH et ABC, on peut écrire :

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{BH}{BC}$$

Avec le premier et troisième terme, on obtient :

$$\frac{CB}{AB} = \frac{BH}{BC}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{CB^2 = HB \cdot AB}$ C'est le théorème d'Euclide.

Le carré d'une cathète est égal au produit de l'hypoténuse par sa projection sur l'hypoténuse.

➢ ***Géométrie Série 6***