Géométrie : Série 7

Remarque : Il est nécessaire de faire les exercices suivant sur une feuille à part et non sur l'énoncé. Soignez les détails (=étapes de raisonnement).

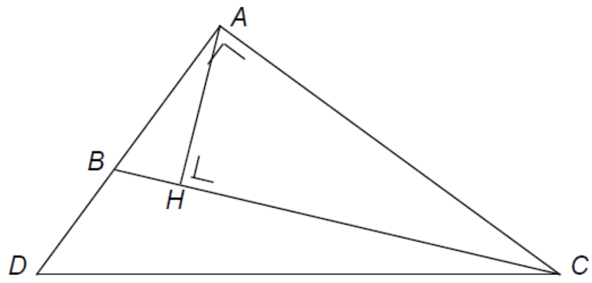
Exercice 1* :

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ cm et $AD = 8$ cm. Calculez la (plus courte) distance d qui sépare le sommet A de la diagonale BD.

Exercice 2 :

Calculez AH, AB, AC et CD.

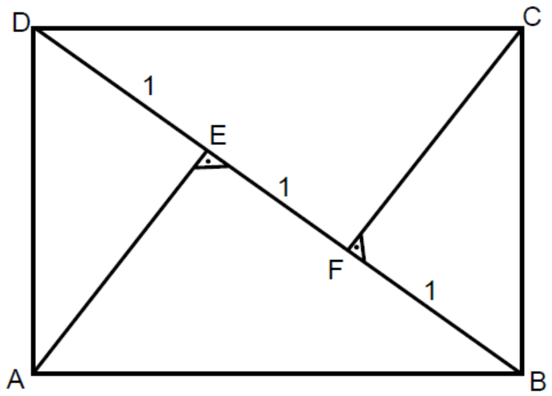
On donne $BH = 2$, $CH = 8$ et $BD = \sqrt{5}$.



Exercice 3 :

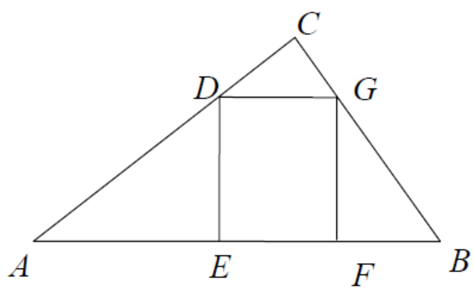
Soit $ABCD$ un rectangle de diagonale $DB = 3$.
E est l'intersection de la perpendiculaire à (BD) passant par A.
F est l'intersection de la perpendiculaire à (BD) passant par C.

Sachant que $DE = EF = BF$,
Calculez les dimensions du rectangle et les longueurs AE et CF.



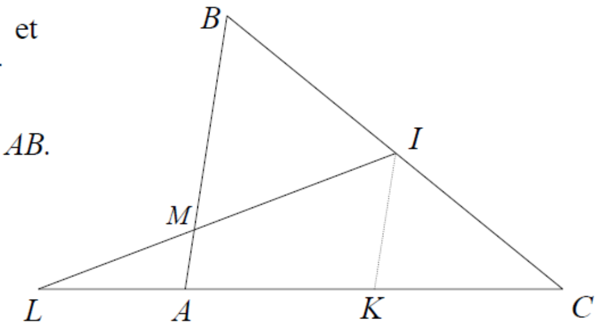
Exercice 4* :

Soit ABC un triangle rectangle en C et $DEFG$ un rectangle inscrit dans ce triangle.
Montrez que $DE^2 = AE \cdot BF$. (justifiez les calculs)



Exercice 5* :

Soient I et K les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$. Le point L est le symétrique de K par rapport à A. Les droites (IL) et (AB) se coupent en M. Calculez AM en fonction de AB.



Solutions :

Ex 1 : $\overline{AE} = 4{,}8\ cm$

Ex 2 : $\overline{AH} = 4$ $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$ $\overline{CD} = 5\sqrt{5}$

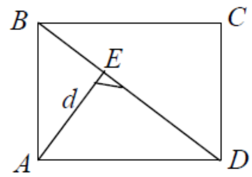
Ex 3 : $\overline{CF} = \sqrt{2}$ $\overline{AE} = \sqrt{2}$

Ex 5 : AM est le quart de la longueur de AB.

Corrigé Série 7 :

Exercice 1 :

Tirez une diagonale BD. Notons E le point d'intersection de la hauteur de $[BD]$, passant par A.



Par Pythagore, on calcule : $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm.

Les triangles ABE et DBA sont semblables car l'angle B leur est commun et ils sont rectangles.

Donc : $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AB}{BD}$, donc $AE = \dfrac{AB}{BD} \cdot AD = \dfrac{6}{10} \cdot 8 = 4{,}8$ cm

C'est la plus courte distance qui sépare le sommet A de la diagonale BD, puisque la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (BD).

Exercice 2 :

Le théorème de la hauteur donne : $AH = \sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$

Pythagore donne : $AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$

Pythagore donne : $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = 4 \cdot \sqrt{5}$

$AD = AB + BD = 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$

Pythagore donne : $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{\left(3 \cdot \sqrt{5}\right)^2 + \left(4 \cdot \sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{(3^2 + 4^2) \cdot 5} = 5 \cdot \sqrt{5}$

Exercice 3 :

On a $DE = EF = BF = 1$, selon l'énoncé.

Le théorème de la hauteur donne : $CF = \sqrt{DF \cdot BF} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$

De même pour $AE = \sqrt{DF \cdot BF} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$

On peut appliquer Pythagore pour trouver que $AD = CB = \sqrt{CF^2 + BF^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

et CD = $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$

En appliquant le théorème d'Euclide, on aurait pu trouver les mêmes résultats :

$CB = \sqrt{BF \cdot BD} = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3}$ et $CD = \sqrt{DF \cdot DB} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$

Exercice 4 :

ADE est semblable à ABC, car ils ont l'angle en A en commun et sont rectangles.

GBF est semblable à ABC, car ils ont l'angle en B en commun et sont rectangles.

Donc ADE est semblable à GBF.

Donc : $\dfrac{DE}{BF} = \dfrac{AE}{FG} = \dfrac{AE}{DE}$ la deuxième égalité vient simplement du fait que $FG = DE$

En faisant un produit en croix, on constate que : $DE^2 = AE \cdot BF$

Remarquez que dans le cas particulier où les points D, G et C sont confondus, les segments $[DE]$ et $[FG]$ sont confondus et représentent la hauteur du triangle. On retrouve le théorème de la hauteur.

En tirant une droite de K à I, on obtient une droite parallèle à (AB), car le triangle CBA a le côté $[BC]$ deux fois plus long que le côté $[CI]$, le côté $[AC]$ deux fois plus long que le côté $[CK]$ et l'angle en C est le même pour les triangles CBA et CIK.

On en déduit que la longueur IK est la moitié de la longueur AB.

Le triangle LAM est semblable au triangle LKI, avec $KL = 2 \cdot AL$, donc la longueur AM est la moitié de la longueur IK, qui elle-même est la moitié de la longueur AB.

Conclusion, la longueur AM est le quart de la longueur AB.