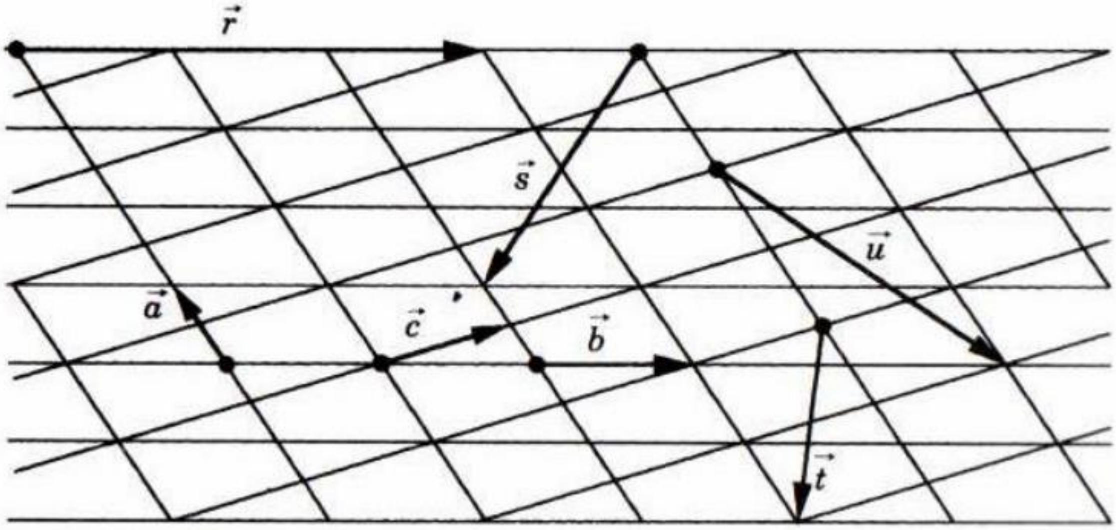
Géométrie vectorielle Série 2

Exercice 1 : Considérons les vecteurs représentés dans la figure suivante :



a) Construire les vecteurs :
$\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$, $\vec{e} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{f} = \frac{1}{2}(3\vec{a} - \vec{b}) - \frac{7}{2}\vec{c}$

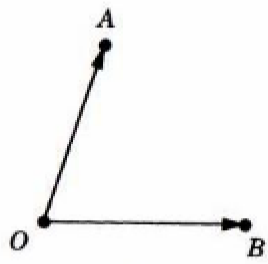
b) Exprimer les vecteurs $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ *et* $\vec{u}$ comme combinaison linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$

c) Exprimer les vecteurs $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ *et* $\vec{u}$ comme combinaison linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{c}$

d) Construire les vecteurs ci-dessous et les exprimer comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$
$\vec{x} = 2\vec{t} - \vec{u} + \vec{s}$; $\vec{y} = -2\vec{r} + \vec{t} + 3\vec{c}$; $\vec{z} = \frac{4}{3}\vec{r} + \frac{3}{2}\vec{s} - \vec{u}$

Exercice 2 : Recopier (décalquer) les vecteurs sur une feuille blanche pour faire l'exercice.

On donne trois points non alignés O, A *et* B.



a) Construire les points C, D *et* E tels que: $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$

Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, où $\lambda \epsilon \mathbb{R}$?

b) Construire les points F, G *et* H tels que:

$$\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad et \quad \overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, où $\lambda \epsilon \mathbb{R}$

c) Construire les points I, J, K *et* L tels que:

$$\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{OK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\ ; \ \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble pour points P tels que $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$, où $\lambda \epsilon \mathbb{R}$?

Exercice 3 :

Relativement à une base de V_2, on donne les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$.

Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{c}$.

Exercice 4 : Relativement à une base de V2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix},\ \vec{e}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix},\ \vec{g}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix},\ \vec{h}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\ \vec{i}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

Exercice 5 :

a) Trouver deux nombres λ et μ tels que $\vec{x}=\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2$.

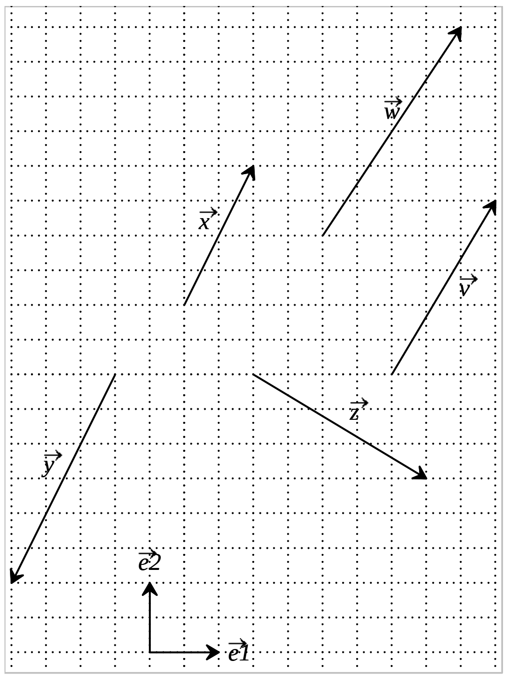
b) Trouver deux nombres α et β tels que $\vec{z}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2$.

c) Trouver un nombre k tel que $\vec{y}=k\vec{x}$.

d) Trouver un nombre h tel que $\vec{x}=h\vec{y}$.

e) Trouver un nombre a tel que $\vec{w}=a\vec{v}$.

f) Trouver deux nombres δ et ε tels que $\vec{z}=\delta\vec{x}+\varepsilon\vec{w}$.

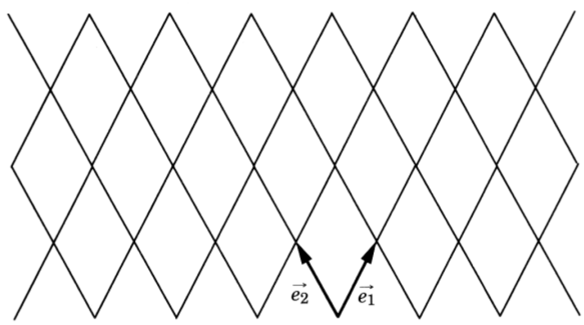


Exercice 6 : Soit $\mathcal{B}\left(\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2\right)$ une base de V_2.

a) Dessiner un représentant des vecteurs suivants

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.

b) Dessiner un représentant des vecteurs $\vec{v}=\vec{b}+\vec{c}$ et $\vec{u}=3\vec{b}+2\vec{c}$ puis donner leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$.



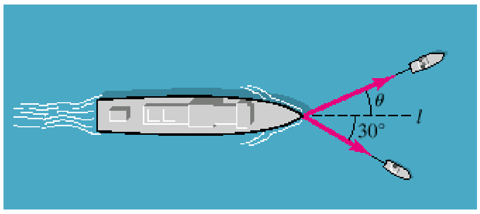
Exercice 7 : Calculer la norme des vecteurs suivants :

$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \quad \vec{b} = -4\vec{j} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$

Exercice 8: On donne les vecteurs $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ *et* $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$. Déterminer le nombre réel k pour que le vecteur $\vec{a} + \mathrm{k}\vec{b}$ ait une norme égale à $\sqrt{82}$

Exercice 9 : La figure ci–dessous montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans un port.

La trajectoire que suit ce navire est rectiligne. Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20'000 [N] sur son câble et fait un angle θ avec la trajectoire du navire. Le plus petit génère une force de 16'000 [N] et fait un angle de 30° avec la trajectoire du navire.



Calculer l'angle θ.

EXERCICES A FAIRE SUR UNE FEUILLE A PART ET NON SUR L'ENONCE

Exercice 10 : Soient A, B, C, D, E *et* Fdes points quelconques du plan. Compléter, si possible

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} =$

c) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} =$

d) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} =$

e) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} =$

f) $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} =$

Exercice 11 : Soient A, B, C *et* D quatre points quelconques du plan.

Montrez l'égalité suivante$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Exercice 12 : Compléter les égalités suivantes **sur une feuille quadrillée**:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} =$

c)$\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} =$

d) $5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

e) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} =$

f) $-\frac{3}{4}\begin{pmatrix} 6{,}8 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$

Exercice 13: Déterminer le couple $(x; y)$ qui vérifie:

a) $(3; -1) + (x; y) = (2; 0)$

b) $(3; -2) + (x; y) = (-3; 2)$

c)$(x; y) + (x, y) = (6; -2)$

Exercice 14 :

Déterminer le réel λ qui vérifie :

a) $\lambda(5;6) = (10;12)$

b) $\lambda(-4;0) = (4;0)$

c) $\lambda(2;3) = (3;2)$

Exercice 15 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère $\vec{x} = (2;3);\ \vec{y} = (-1;0)\ et\ \vec{z} = (2;-3)$

Calculer : $\vec{e} = \vec{x} + 2\vec{y}$, $\vec{f} = -2\vec{x} + \vec{z}\ \ et\ \vec{g} = \vec{x} + 2\vec{y} - 0{,}3\vec{z}$

Exercice 16 :

Montrer que : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, où $A = (-3;1);\ \ B = (1;3); C = (4;1)\ \ et\ D = (2;0)$

Exercice 17 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère $A = (2;1);\ \ B = (6;4)\ et\ C = (2;6)$

a) $\|\overrightarrow{AB}\| =$

b) $\|\overrightarrow{AC}\| =$

c) Déduisez de ce qui précède que le triangle ABC est isocèle

---

Exercice 18 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère :

a) $A = (0;0); B = (-11;3)\ et\ C = (-8;-2)$. Montrer que le triangle ABC n'est pas équilatéral

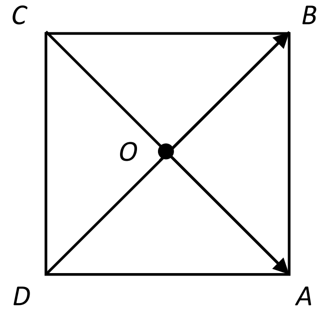
b) $A(0;0); B(6;8) et\ C\left(3+4\sqrt{3}; 4-3\sqrt{3}\right)$. Montrer que ABC est équilatéral

---

Exercice 19 :

Soit *ABCD* un carré de centre *O*. Déterminer dans la base $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ les composantes des vecteurs :

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, et $\overrightarrow{DA}$.



Corrigé Géométrie vectorielle Série 2 :

Exercice 2 :

a) La droite (OA) b) La droite parallèle à (OA) passant par B c) La droite (AB)

Exercice 3 : $\alpha = 3$ et $\beta = 2$

Exercice 4 : $\vec{e}$ est colinéaire à tous. $/\vec{a}, \vec{d}$ et $\vec{h}$ / $\vec{b}$ et $\vec{\imath}$ / $\vec{c}$ et $\vec{g}$

Exercice 5 : a) $\lambda = 1, \mu = 2$ b) $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{5}{2}$ c) $k = -\frac{3}{2}$ d) $h = -\frac{2}{3}$ e) $\emptyset$ f) $\delta = -\frac{21}{2}, \varepsilon = \frac{13}{2}$

Exercice 6 : $\vec{v} = \binom{-1}{2}$ $\vec{u} = \binom{-1}{7}$

Exercice 7 : $\|\vec{a}\| = 5, \|\vec{b}\| = 4, \|\vec{c}\| \cong 8{,}544;$ $\|\vec{d}\| = 1$

Exercice 8 : $k_1 = \frac{3}{2}$ et $k_2 = -\frac{23}{10}$

Exercice 9 : $\sin^{-1}(0{,}4) \approx 23{,}6°$

Exercice 10 : a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AF}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) on ne peut rien faire e) $\vec{0}$ f) $2 \cdot \overrightarrow{EB}$

Exercice 11 :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \quad \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, donc l'égalité de la première ligne est vraie.

Exercice 12 :

a) $\langle\, 2\,;3 \,\rangle + \langle\, -1\,;0 \,\rangle = \langle\, 1\,;3 \,\rangle$

b) $\left\langle \frac{1}{2}\,;2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{3}\,;-\frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,;2-\frac{1}{4} \right\rangle = \left\langle \frac{5}{6}\,;\frac{7}{4} \right\rangle$

c) $\langle\, 6{,}5\,;-2 \,\rangle + \langle\, 7\,;1 \,\rangle - \langle\, 5\,;-3 \,\rangle = \langle\, 8{,}5\,;2 \,\rangle$

d) $5 \cdot \langle\, 2\,;3 \,\rangle = \langle\, 10\,;15 \,\rangle$

e) $2 \cdot \langle\, 2\,;8 \,\rangle = \langle\, 4\,;16 \,\rangle$

f) $-\frac{3}{4} \cdot \left\langle 6{,}8\,;\frac{2}{3} \right\rangle = \langle\, -5{,}1\,;-0{,}5 \,\rangle$

Exercice 13 :

a) $\langle\, 3\,;-1 \,\rangle + \langle\, x\,;y \,\rangle = \langle\, 2\,;0 \,\rangle \Leftrightarrow \langle\, x\,;y \,\rangle = \langle\, 2\,;0 \,\rangle - \langle\, 3\,;-1 \,\rangle = \langle\, -1\,;1 \,\rangle$

b) $\langle\, 3\,;-2 \,\rangle + \langle\, x\,;y \,\rangle = \langle\, -3\,;2 \,\rangle \Leftrightarrow \langle\, x\,;y \,\rangle = \langle\, -3\,;2 \,\rangle - \langle\, 3\,;-2 \,\rangle = \langle\, -6\,;4 \,\rangle$

c) $\langle\, x\,;y \,\rangle + \langle\, x\,;y \,\rangle = \langle\, 6\,;-2 \,\rangle \Leftrightarrow \langle\, 2x\,;2y \,\rangle = \langle\, 6\,;-2 \,\rangle \Leftrightarrow \langle\, x\,;y \,\rangle = \langle\, 3\,;-1 \,\rangle$

Exercice 14 :

a) $k \cdot \langle\, 5\,;6\,\rangle = \langle\, 10\,;12\,\rangle \;\Leftrightarrow\; k = 2$

b) $k \cdot \langle\, -4\,;0\,\rangle = \langle\, 4\,;0\,\rangle \;\Leftrightarrow\; k = -1$

c) $k \cdot \langle\, 2\,;3\,\rangle = \langle\, 3\,;2\,\rangle \;\Leftrightarrow\; 2k = 3$ et $3k = 2$, ce n'est pas possible.

Exercice 15 :

$\vec{x} = \langle\, 2\,;3\,\rangle$; $\vec{y} = \langle\, -1\,;0\,\rangle$ et $\vec{z} = \langle\, 2\,;-3\,\rangle$

$\vec{e} = \vec{x} + 2\vec{y} = \langle 2\,;3\rangle + 2\cdot\langle -1\,;0\rangle = \langle 2+2\cdot(-1)\,;3+2\cdot 0\rangle = \langle 0\,;3\rangle$

$\vec{f} = -2\vec{x} + \vec{z} = -2\cdot\langle 2\,;3\rangle + \langle 2\,;-3\rangle = \langle -2\cdot 2+2\,;-2\cdot 3-3\rangle = \langle -2\,;-9\rangle$

$\vec{g} = \vec{x} + 2\vec{y} - 0,3\vec{z} = \langle 2\,;3\rangle + 2\cdot\langle -1\,;0\rangle - 0,3\cdot\langle 2\,;-3\rangle = \langle 2+2\cdot(-1)-0,3\cdot 2\,;3+2\cdot 0-0,3\cdot(-3)\rangle =$

$\vec{g} = \langle -0,6\,;3,9\rangle$

Exercice 16 :

$A = \langle\, -3\,;1\,\rangle$; $B = \langle\, 1\,;3\,\rangle$; $C = \langle\, 4\,;1\,\rangle$ et $D = \langle\, 2\,;0\,\rangle$

Montrons que : $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 1\,;3\rangle - \langle -3\,;1\rangle = \langle 4\,;2\rangle$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \langle 2\,;0\rangle - \langle 4\,;1\rangle = \langle -2\,;-1\rangle = -0,5\cdot\langle 4\,;2\rangle = -0,5\cdot\overrightarrow{AB}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont multiple l'un de l'autre, ils sont parallèle.

Exercice 17 :

$A = \langle\, 2\,;1\,\rangle$; $B = \langle\, 6\,;4\,\rangle$ et $C = \langle\, 2\,;6\,\rangle$

a) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\,\langle\, 6\,;4\,\rangle - \langle 2\,;1\rangle\,\| = \|\,\langle\, 4\,;3\,\rangle\,\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\,\langle\, 2\,;6\,\rangle - \langle 2\,;1\rangle\,\| = \|\,\langle\, 0\,;5\,\rangle\,\| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$

c) Puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, le triangle est isocèle.

Exercice 18 :

$A = \langle\, 0\,;0\,\rangle$; $B = \langle\, 6\,;8\,\rangle$ et $C = \langle\, 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\,\rangle$

a) Pour montrer que le triangle ABC est équilatéral, il faut montrer que la longueur des trois côtés est la même.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\,\langle\, 6\,;8\,\rangle\,\| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\,\langle\, 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\,\rangle\,\right\| = \sqrt{\left(3+4\cdot\sqrt{3}\right)^2 + \left(4-3\cdot\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100} = 10$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \left\|\,\langle\, 3+4\cdot\sqrt{3}\,;4-3\cdot\sqrt{3}\,\rangle - \langle\, 6\,;8\,\rangle\,\right\| = \sqrt{\left(-3+4\cdot\sqrt{3}\right)^2 + \left(-4-3\cdot\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100} = 10$

Le triangle ABC est équilatéral, car les trois côtés sont de même longueur.

Exercice 19 :

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix};\; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};\; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix};\; \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix};\; \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$